دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی

عنوان

پارادوکس آزمون ناگهانی و قضیه دوم ناتمامیت

استاد راهنما

سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور

محمّد شهریاری

پژوهشگر

سیده پری‌ناز قائمی

۱۳۹۳

بِسْـــمِ اللّـــهِ الرِحْمـــنِ الرّحيـــم

به نام آن خدایی که نام او راحتِ روح است و پیغام او مفتاحِ فتوح و سلام او در وقتِ صباح مؤمنان را صبوح و ذکر او مرهمِ دل مجروح و مِهر او بلانشینان را کشتیِ نوح است.

الهـــی، به نام تو زبان‌ها گویا شده، به نام تو جان‌ها شیدا شده، بیگانه آشنا شده، کارها هویدا شده و راه‌ها پیدا شده است.

الهـــی، ای خالق بی‌مدد و ای واحد بی‌عدد، ای اول بی‌هدایت و ای آخر بی‌نهایت، ای بخشنده بی‌منّت و ای مهربان بر خلایق، بذات لایزال خود و به صفات با کمال خود و به عزت جلال خود و به عظمت جمال خود، جان ما را صفای خود دِه، دل ما را هوای خود دِه، چشم ما را ضیای خود دِه و ما را آن دِه که آن بِه.

الهـــی، در الهیت یکتایی، در اَحدیت بی‌همتایی، در ذات و صفات از خلق جدایی، متّصف به بهایی، متّحد به کبریایی، مایه هر بینوا و پناه هر گدایی، همه را خدایی.

الهـــی، دلی دِه که طاعت افزاید، طاعتی دِه که به بهشت رهنمون آید، علمی دِه که در او آتش هوا نبود، عملی دِه که در او ریا نبود، دیده‌ای دِه که غرّ ربوبیّت تو بیند، دلی دِه که ذّل عبودیّت تو گزیند، نفسی دِه که حلقه بندگی تو در گَوش کند، جانی دِه که ز هر حکَمت را به طبع نوش کند.

الهـــی، دانایی دِه تا از راه نیفتیم و بینایی دِه تا در چاه نیفتیم، دست گیر که دست‌آویزی نداریم، بپذیر که پای گریز نداریم.

الهـــی، از وجود تو هر مفلسی را نصیبی است، از کرَم تو هر دردمندی را طبیبی است، از سِعت رحمت تو هر کسی را بهره‌ای است، از بسیاری بخشش تو هر نیازمندی را قطره‌ای است، بر سَر هر مؤمن از تو تاجی است، در دل هر مُحّب از تو سراجی است، هر شیفته‌ای را با تو سر و کاری است، هر منتظری را آخر روز دیداری است.

الهـــی، گر در کمین سر تو به ما عنایت نیست، سرانجام قصه ما جزء حسرت نیست.

الهـــی، کدام زبان به ستایش تو رسد؟ کدام خرد صفت تو برتابد؟ کدام شکر با نیکوکاری تو برابر آید؟ کدام بنده به گُزاردن عبادت تو رسد؟

الهـــی، ادای شکر تو را هیچ زبان نیست و دریای فضل تو را هیچ کران نیست و سرِ حقیقت تو بر هیچکس عیان نیست، هدایت کن بر ما رهی که بهتر از آن نیست.

گزیده‌ای از مناجات‌نامه خواجه عبدالله انصاری

تقدیم به:

دوســــــــتداران علــــم

به نام خالق حساب

وَمَن لَمْ يَشْكُرِ الْمَخلوق لَمْ يَشْكُرِ الْخالِقْ.

حمد و سپاس ارزانی بارگاه حضرت احدیت که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **سعید صالحی پورمهر**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر**محمّد شهریاری** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر **جعفر صادق عیوضلو** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم. از جناب آقای مهندس **فرزاد علمی** که در تدوین این رساله کمک شایانی به اینجانب نمودند و همچنین از تمام دوستان دوران تحصیلم کمال قدردانی و تشکر را دارم. ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی بخصوص دکتر **مرتضی فغفوری** و همچنین دکتر **اصغر رنجبری** مدیرگروه ریاضی محض و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم. همچنین سپاس از کلیه اعضای خانواده‌ام بخصوص از **پدر و مادر** عزیزم، مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور شدن، غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تجربه‌های زیبای زندگیم را مدیون حضور سبز آنها هستم.

سیده پری ناز قائمی

۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: قائمی نام: سیده پری‌ناز

عنوان: پارادوکس آزمون ناگهانی و قضیه دوم ناتمامیت

استاد راهنما : سعید صالحی پورمهر

استاد مشاور : محمّد شهریاری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۶۴

کلید واژه‌ها: قضایای ناتمامیت گودل، پیچیدگی کولموگروف، پارادوکس آزمون ناگهانی، خودارجاعی، حساب، جمله مستقل.

چکیده

قضایای اول و دوم ناتمامیت گودل از مهمترین نتایج ریاضیات قرن بیستم هستند. اثبات اصلی گودل برای اولین قضیه ناتمامیت مبتنی بر پارادوکس دروغگو است. قضیه دوم ناتمامیت به‌طور مستقیم از اثبات اصلی گودل برای قضیه اول ناتمامیت نتیجه می‌شود. اثباتهای متفاوتی برای قضایای اول و دوم ناتمامیت شناخته شده‌اند و اثبات ارایه شده توسط شایتین برای قضیه اول ناتمامیت مبتنی بر پارادوکس بِری (کوچکترین عدد طبیعی توصیف‌ناپذیر) است که به ناتمامیت شایتین معروف است. از برهان شایتین برای ناتمامیت، پیچیدگی کولموگروف و استدلالی مشابه پارادوکس آزمون ناگهانی، اثبات جدیدی برای قضیه دوم ناتمامیت گودل ارایه می‌شود که می‌تواند اولین راه حل قابل قبول منطقی برای حل پارادوکس آزمون ناگهانی در نظر گرفته شود.

فهرست مطالب

مقدمه

کورت گودل از مشاهیر منطق و ریاضیات قرن بیستم، با اثبات قضایای معروف ناتمامیت اول و دوم تاثیرات شگرفی در ریاضیات و منطق برجای گذاشت. اندک قضایای دیگر در تاریخ ریاضیات موجودند که به اندازه قضایای ناتمامیت گودل روی ریاضیدانان و فیلسوفان تاثیر گذاشته‌اند. در این پایان‌نامه که بر مبنای مراجع [۱۴] و [۱۱] نگاشته شده است، برآنیم که برمبنای پیچیدگی کولموگروف، قضیه ناتمامیت شایتین و صورتی از پارادوکس آزمون ناگهانی، اثبات جدیدی برای قضیه دوم ناتمامیت گودل ارایه دهیم. مناسب به نظر می‌رسد اشاره‌ای بر محتوای قضایای اول و دوم ناتمامیت گودل داشته باشیم: قضیه اول ناتمامیت گودل بیان می‌دارد که برای هر نظریه سازگار ریاضی به اندازه کافی غنی مانند ZFC یا PA، گزاره‌ایی موجود است که در داخل نظریه نه می‌توان آن را اثبات کرد و نه رد کرد. قضیه دوم ناتمامیت گودل بیان می‌دارد که برای هر نظریه سازگار ریاضی به اندازه کافی غنی، سازگاری نظریه در خود نظریه قابل اثبات (یا قابل رد) نیست.

اثباتهای متعددی برای قضایای اول و دوم ناتمامیت گودل ارایه شده‌اند. در فصل نخست پایان‌نامه، ما ابتدا به بیان مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصلهای آتی و شرح مختصری از پارادوکس‌های به کار گرفته شده در این پایان‌نامه می‌پردازیم. در فصل دوم، اثبات گودل برای قضیه اول ناتمامیت گودل و همچنین اثبات شایتین را که بر مبنای پارادوکس بِری یک فرمول‌بندی نظریه اطلاعاتی از قضیه اول ناتمامیت به وسیله پیچیدگی کولموگروف است و به ناتمامیت شایتین معروف است، بیان می‌کنیم. پیچیدگی کولموگروف منجر به قضیه دوم ناتمامیت نیز می‌شود که آن را در فصل سوم که آخرین فصل این پایان‌نامه می‌باشد بررسی می‌کنیم. همچنین پس از بررسی روش‌های دیگر نشان می‌دهیم که قضیه دوم ناتمامیت صورتی از پارادوکس آزمون ناگهانی را به دست می‌دهد.

فصل ۱

مفاهیم پایه و مقدماتی

۱.۱ پارادوکس‌ها

پارادوکس [۱] به معنای استدلالی است که حداقل در ظاهر درست است ولی در نهایت به یک نتیجه متناقض با تجربیات ما، و یا حتی یک تناقض محض (گزاره‌ای مانند $P \wedge \neg P$) و یا گزاره‌ای که با اصول حساب در تناقض است مثلاً $(0 = 1)$ منجر می‌شود [۲۴]. البته مترجمان در ترجمه واژه‌ی پارادوکس معادل‌هایی از قبیل تناقض‌نما، باطل‌نما، معما، خارق اجماع، تعارض در اقوال، تضاد، ناسازه، تنازع و ... را جایگزین نموده‌اند. امّا به نظر می‌رسد هیچ یک از آنها معنای دقیق پارادوکس را بیان نمی‌کنند. شاید به همین جهت است که برخی مترجمان ترجیح می‌دهند خود آن را بدون ترجمه در زبان فارسی بیاورند. در واقع، پارادوکس عبارت است از به دست آوردن یک جمله غیرقابل قبول از مقدمات مقبول و قواعد استنتاجی معتبر. به همین دلیل نیز، برای حل پارادوکس سعی می‌شود یا در صدق مقدمات و یا در اعتبار قواعد استنتاج خدشه وارد کرده و یا اینکه نتیجه را پذیرفته تنها توضیح داده شود که چرا غیرقابل قبول جلوه می‌نماید. به عبارتی دیگر، می‌توان پارادوکس را به این صورت تعریف نمود: آنچه که تناقض‌آمیز، باورنکردنی و خلاف انتظار و شهود ماست. یعنی آنچه به نظر درست می‌رسد ولی غلط است، به نظر غلط می‌رسد ولی درست است، یا به نظر غلط می‌رسد و واقعاً غلط است [۲۵].

از نظر تاریخی پارادوکس‌ها در ایجاد انگیزه برای گسترش مرزهای دانش، تعمیق بینش، تعمیم شیوه های استدلال، افزایش دقت و وضع قوانین زبان شناختی جدید تأثیر شگرفی داشته‌اند. مثلاً پارادوکس‌های زنون در تکامل حسابان در قرن‌های ۱۷ تا ۱۹، پارادوکس‌های نظریه مجموعه‌ها مانند پاراداوکس‌های بورالی فورتی، کانتور و راسل در تدقیق نظریه (شهودی) مجموعه‌های کانتور، پارادوکس دروغگو در طرح برهان قضیه ناتمامیت گودل در قرن بیستم، پارادوکس بوچوفسکی در درک نارسایی‌های زبان و پارادوکس لامپ تامسون و پارادوکس تیر زنون در طرح مشکلات مفاهیم نظری در فیزیک نقش به‌سزایی داشتند [۲۵].

ابزارهای متفاوتی برای رفع و رجوع پاراداوکس‌ها به کار گرفته شده‌اند. مثلاً بوچفار [۲] در سال

[۱] Paradox

[۲] D.A. Bochvar

۱۹۳۸ از منطق‌های سه ارزشی برای تحلیل پارادوکس‌ها استفاده کرد. همچنین می‌توان از فرازبان برای تفکیک جملات به لایه‌های مختلفی با نام‌های نوع اول، نوع دوم و ... که روی آن‌ها درستی و نادرستی به‌طور مستقل تعیین می‌شوند استفاده کرد، کاری که مثلاً در مورد پارادوکس دروغگو که بیان می‌دارد «آنچه می‌گویم دروغ است» انجام شدنی است. برای مثال آلفرد تارسکی[۳] با تقسیم زبان به دو لایۀ زبان موضوعی که در مورد امور بیرون از زبان صحبت می‌کند و فرازبان که در مورد زبان موضوعی سخن می‌گوید، استدلال می کند که وقتی می‌گوییم «آنچه می‌گویم دروغ است»، عبارت «دروغ است» که متعلق به فرازبان است در لایۀ موضوعی به کار رفته است و لذا از نظر ساختار منطقی اشکال دارد. با این حال، هربار که پارادوکسی در ریاضیات (وعلم) ظاهر می‌شود، برای حل آن باید فهم خود را از آن چه داریم بهبود بخشیم یا تصحیح کنیم یا قوانین زبان شناختی مناسب وضع کنیم و این دلیل برای قراردادن پارادوکس‌ها در کالبد ریاضیات و جدی گرفتن آن‌ها کافی به نظر می‌رسد [۲۵].

بعضی پارادوکس‌ها نتایج نادرست حاصل از استدلال نادرست هستند؛ مانند پارادوکس دار غیرمنتظره، پارادوکس آشیل و لاک پشت زنون (فیلسوف قرن پنجم اهل الیا در جنوب ایتالیا و شاگرد پارامندیس) و پارادوکس استقراء. دسته‌ای از پارادوکس‌ها ناشی از اشکالاتی در اصول و تعاریف ما هستند؛ در این مورد می‌توان به پارداوکس دروغگو و پارادوکس سقراط و پارادوکس آلبرت ساکسونی اشاره کرد. پوانکاره و راسل دریافتند که بروز بسیاری از پارادوکس‌ها مانند پارادوکس راسل، پارادوکس کانتور، پارادوکس خودنامصداق، پارادوکس بِری و ... به علت وجود تعریف‌های خودارجاعی در آنها است. بعضی پارادوکس‌ها خلاف شهود ما و باورنکردنی و در عین حال درست هستند، مانند پارادوکس‌های باناخ-تارسکی و روز تولد. تعدادی از پارادوکس‌ها ناشی از تعریف‌های مبهم هستند مانند پارادوکس‌های توده، ریچارد و تخته سیاه. بعضی پارادوکس‌ها مانند لامپ تامسون و اشتقاق به دو بخش ناشی از مشکلات فلسفی مربوط به مفاهیم نظری در فیزیک مانند حرکت، زمان و ... مربوطند [۲۵]. در این مختصر ما صرفاً به بیان چند پارادوکس که در این پایان‌نامه به کار رفته‌اند بسنده می‌کنیم.

[۳] A. Tarski

پارادوکس دروغگو

از نظر تاریخی، پارادوکس دروغگو[۴] به زمان‌های بسیار گذشته باز می‌گردد و غالباً به منطقدان یونانی قرن چهارم قبل از میلاد، ابولیدس[۵] نسبت داده می‌شود. این پارادوکس منطق‌دانان باستان را به خود مشغول داشته و حتی باعث مرگ نابهنگام یکی از آنها با نام فیلاتس[۶] شد [۲۶]. ساده‌ترین تقریر این پارادوکس این است که گوینده‌ای بگوید: «آنچه می‌گویم دروغ است». سوال این است که آیا این گوینده راست می‌گوید یا دروغ می‌گوید. اگر راست بگوید پس اینکه می‌گوید «دروغ می‌گویم» حرف راستی می‌زند، یعنی دروغ می‌گوید و اگر دروغ می‌گوید پس اینکه خود می‌گوید «دروغ می‌گویم» حرف راستی می‌زند، یعنی راست می‌گوید. پس اگر آنچه می‌گوید راست باشد دروغ است و اگر دروغ باشد راست است. پارادوکس دروغگو خودارجاعی است یعنی فرض درستی یا نادرستی یک جمله ممکن است نتیجه‌ایی در مورد درستی یا نادرستی خود آن جمله داشته باشد.

در اصل، صورت تاریخی پارادوکس دروغگو بدین صورت می‌باشد که اپیمندس[۷] از اهالی کرِت[۸] گفته است: «همه کرِتی‌ها دروغگو هستند». اگر این حرف را آرایشگر سیسیلی درباره اهالی کرِت گفته بود پارادوکسی در کار نبود امّا از آنجا که گوینده خود اهل کرِت است، حکم او درباره گفته‌های کرِتی‌ها شامل همین گفته هم می‌شود. یعنی گفته او که همه کرِتی‌ها دروغگو هستند نیز دروغ است!

بحث و تأمل درباره پارادوکس دروغگو از دیر زمان، موجب طرح تقریرهای مختلف، صورتهای تقویت شده و عرضه راه حل‌های گوناگون برای آن شده است. از نظر فیلسوفان اسلامی، پارادوکس دروغگو ابتدا با نام «شبهه کل کلامی کاذب» طرح شد و سپس دانشمندان مسلمان در قرن هفتم آن را «شبهه جذر أصم» خواندند، زیرا سختی حل آن، به جذر عدد أصم (گنگ) شباهت دارد. اثیرالدین ابهری نخستین دانشمند اسلامی بوده که شبهه جذر أصم را مطرح کرده است. دانشمندان مسلمان دیگری چون فخرالدین رازی، خواجه نصیرالدین طوسی، کاتبی قزوینی، فارابی، شمس‌الدین خفری

[۴] Liar paradox

[۵] Eubulides

[۶] Philatas of cos

[۷] Epimendes

[۸] Cretan

و ... به اهمیت این پارادوکس توجه کرده‌اند. راه حل‌ها و پاسخ‌هایی که دانشمندان مسلمان برای جذر أصم ارایه داده‌اند، بسیار متنوع است. فارابی جذر أصم را پارادوکس تلقی نکرده تا راه حلی برای آن ارایه کند بلکه آن را کاذب (دروغگو) دانسته و این چنین تحلیل کرده که عبارت «آنچه می‌گویم دروغ است» یک جمله کاذب است و هر نظریه‌ای که ساختار آن را داشته باشد کاذب خواهد بود، به این بیان که اگر جمله‌ایی که در آن محمول برای برخی افراد موضوع درست و برای برخی نادرست باشد و به شکل کلی استفاده شود، کاذب خواهد بود. امّا متفکرانی که آن را پارادوکس تلقی کرده‌اند، دراین‌باره دو دیدگاه متمایز داشته‌اند، گروهی پارادوکس دروغگو را تناقض واقعی و غیر قابل حل می‌دانستند و گروهی دیگر می‌پنداشتند که پارادوکس دروغگو یک تناقض نهفته دارد و متضمن تناقض واقعی نیست و لذا قابل حل است. منطقدانان و ریاضیدانان غربی همچون راسل، تارسکی، رمزی، ژوردن و ... پارادوکس دروغگو را مورد توجه قرار دادند و صورتهای دیگری از آن را مطرح کردند [۲۲]. آلفرد تارسکی، پارادوکس دروغگو را بدین صورت بیان کرده است:

کتابی را تصور کنید که 100 صفحه دارد و در هر صفحه‌ایی فقط یک جمله نوشته شده است، در صفحه 1 می‌خوانیم: «جمله‌ایی که در صفحه 2 این کتاب نوشته شده، راست است». در صفحه 2 می‌خوانیم: «جمله‌ایی که در صفحه 3 این کتاب نوشته شده، راست است» و همینطور تا صفحه 99. در صفحه 100 این جمله را می‌خوانیم: «جمله‌ایی که در صفحه 1 این کتاب نوشته شده، دروغ است». اگر فرض کنیم جمله‌ایی که در صفحه 1 نوشته شده است، واقعاً دروغ باشد، با بحثی ساده امّا نسبتاً طولانی به این نتیجه می‌رسیم که این فرض نادرست است. پس فرض می‌کنیم که جمله نوشته شده در صفحه 1 راست باشد و با همان ترتیب قبلی نتیجه می‌گیریم که این فرض نادرست است پس به یک پارادوکس می‌رسیم.

می‌توان چندین کتاب پارادوکس‌آمیز را با هم ترکیب نمود که گونه‌های مختلف همان پارادوکس فوق می‌باشند. هر کدام از این کتابها 100 صفحه دارد. در هر صفحه فقط یک جمله نوشته شده است و شکل جمله‌ها به صورت زیر می‌باشد:

«جمله چاپ شده در صفحه □□ این کتاب xx است.»

در هر حالت به جای xx کلمات «راست» یا «دروغ» قرار می‌گیرد و به جای □□ یکی از اعداد 1، 2، 3، ... ، 100 جایگزین می‌شود. البته هرگونه‌ای از کتاب اصلی که مطابق این قاعده ترکیب یافته،

منجر به تناقض می‌شود. یافتن اینکه کدام یک از این گونه‌ها منجر به پارادوکس می‌شود کار مشکلی است. فرض کنید مثلاً در صفحه 1 کتاب گفته شده که جمله چاپ شده در صفحه 3 راست است، در حالیکه در جای دیگری مثلاً صفحه 2 ادعا شده که همان جمله دروغ است. از این نمی‌توان نتیجه گرفت که کتاب پارادوکس‌آمیز است، بلکه فقط این نتیجه را می‌گیریم که یکی از جملات صفحه 1 یا 2 نادرست است. پارادوکس زمانی روی می‌دهد که یک جمله از کتاب، مستقل از فرض‌های ما در مورد راست بودن یا دروغ بودن دیگر جملات کتاب، هم درست باشد و هم نادرست. راسِل[۹] نیز بنابر قاعده‌ای (هر جمله متناقض با خود مستلزم نقیض است)، پارادوکس دروغگو را همانند جملات پرسشی و امری و مانند اینها، نه راست و نه دروغ می‌داند. به این بیان که اگر «هر چه می‌گویم دروغ است» راست باشد بنابر قاعده مذکور متناقض با خود است پس راست نیست و اگر «هر چه می‌گویم دروغ است» دروغ باشد، بنابر قاعده مذکور متناقض با خود است پس دروغ نیست. بنابراین پارادوکس دروغگو، نه راست و نه دروغ است. در واقع پارادوکس دروغگو صورت ساده شده از پارادوکس آرایشگر راسِل[۱۰] می‌باشد.

در سال ۱۹۱۳ ریاضیدان انگلیسی با نام ژوردن[۱۱] پارادوکس ابولیدس (دروغگو) را به صورت پارادوکس کارت پستال درآورد به این بیان که کارتی داریم که در یک طرف آن نوشته شده است «جمله پشت این کارت راست است» و زمانی که به پشت کارت رجوع می‌کنیم این جمله را می‌یابیم «جمله پشت این کارت دروغ است»؛ این پارادوکس را پارادوکس تابلو نیز می‌نامند. صورتی دیگر از پارادوکس دروغگو بدین صورت است که فرض کنید شخصی در طول یک ساعت فقط همین یک جمله را گفته باشد: «تمام حرفهایم در این یک ساعت نادرست هستند». اگر این حرف درست باشد چون تنها حرفی که در این یک ساعت گفته این جمله است پس این جمله نادرست است و اگر فرض کنیم که این جمله نادرست است به شیوه‌ای مشابه مجدداً به یک تناقض می‌رسیم.

به عنوان نمونه‌ایی دیگر، دو جمله زیر را در نظر بگیرید:

[۹] B. Russell

[۱۰] یک آرایشگر در شهری هست که می‌گوید: «فقط و حتماً سر کسانی را اصلاح میکنم که خودشان سر خودشان را اصلاح نمی‌کنند». سوال این است: این آرایشگر سر خودش را اصلاح می‌کند یا نه؟

[۱۱] P. E. B. Jourdain

«جمله زیر نادرست است»

«جمله بالا درست است»

اگر فرض کنیم جمله پایین درست است پس جمله بالا درست خواهد بود و در نتیجه جمله پایین نادرست خواهد بود و اگر فرض کنیم جمله پایین نادرست است به شیوه‌ای مشابه به تناقض می‌رسیم. همچنین صورتی دیگر از پارادوکس دروغگو به این صورت نقل شده است که سقراط روزی گفته است: «چیزی که می‌دانم این است که من هیچ چیز نمی‌دانم» و به پارادوکس سُقراط[۱۲] معروف است. اهمیت پارادوکس دروغگو در این است که یکی از مهمترین مفهوم‌ها یعنی مفهوم صدق را به مخاطره می‌افکند. مفهوم صدق و اینکه جمله‌ها و گفته‌ها به چه اعتباری صادق‌اند از بحث‌های اساسی فلسفه و علوم‌اند و پارادوکس دروغگو درست همین مفهوم را تا حد تناقض مورد تردید قرار می‌دهد. تارسکی با کمک این پارادوکس نشان داد که در یک نظریه در مورد اعداد طبیعی مفهوم «درستی» قابل تعریف نیست. به عبارت دیگر، درستی فرمول‌های حساب، توسط یک فرمول در زبان حساب قابل تعریف نیست. کورت گودل[۱۳] نیز با کمک استدلالی مشابه این پارادوکس را ثابت کرد که در هر نظریه اصل موضوعی در مورد اعداد طبیعی، گزاره‌هایی درست وجود دارند که آن نظریه قادر به اثبات آنها نیست، که به قضیه اول ناتمامیت معروف است. برای پارادوکس دروغگو راه حل‌های متعددی پیشنهاد کرده‌اند و می‌کنند و این نشانه آن است که برای این طبقه از پارادوکس‌ها راه حل قاطعی هنوز نیافته‌ایم و شاید هم هرگز نیابیم. امّا هر راه حلی ما را از نکته تازه‌ای آگاه می‌کند. شاید مهمترین راه حل آن گذاشتن قیدِ زیر بر روی همه زبان‌هاست: در هیچ زبانی حق صحبت درباره صدق و کذب گزاره‌های در مورد آن زبان وجود ندارد.

پارادوکس بِری

بعضی جملات فارسی یک عدد طبیعی را توصیف می‌کنند. به عنوان مثال جمله «بزرگترین عدد طبیعی دو رقمی» یا «عددی که هم اول باشد و هم زوج» به ترتیب اعداد 99 و 2 را توصیف می‌کنند.

[۱۲] Socrate's Paradox

[۱۳] Kurt Gödel

این عبارت را در نظر بگیرید: «کوچکترین عدد طبیعی که با کمتر از 13 کلمه قابل توصیف نیست». آیا عددی که این عبارت بر آن دلالت می‌کند، با 13 کلمه قابل توصیف است؟ اگر چنین باشد این یک تناقض است، زیرا بنابه تعریف نمی‌تواند چنین باشد و اگر نباشد باز یک تناقض داریم، زیرا خود عبارت فوق 12 کلمه دارد. پس در واقع «کوچکترین عدد طبیعی که با کمتر از 13 کلمه قابل توصیف نیست» با کمتر از 13 کلمه قابل توصیف است. زیرا که عبارت بالا تنها 12 کلمه دارد. این پارادوکس در سال ۱۹۰۶ توسط برتراند راسل ارایه شده و آن را به بِری[۱۴]منسوب کرده است. این پارادوکس متعلق به پارادوکس‌های معنایی کشف شده در قرن ۱۹ و ۲۰ می‌باشد، که شامل پارادوکس‌های ریچارد[۱۵] و خودنامصداق[۱۶] نیز می‌باشد. ابتدا به بحث در مورد اعتبار پارادوکس بِری می‌پردازیم. برای شروع بحث، فرض می‌کنیم که تمامی واژه‌های زبان فارسی در یک واژه‌نامه استاندارد لیست شده‌اند و T مجموعه همه اعدادطبیعی است که می‌توانند در کمتر از 13 کلمه از زبان فارسی توصیف شده باشند. از آنجایی که تنها تعداد متناهی واژه فارسی وجود دارد، پس فقط تعداد متناهی از ترکیبات کمتر از 13 کلمه موجود است؛ یعنی T یک مجموعه متناهی است. مشخصاً اعداد طبیعی وجود دارند که از همه اعضای T بزرگتر هستند. بنابراین کوچکترین عدد طبیعی که در کمتر از 13 کلمه قابل توصیف نیست وجود دارد. بنابه تعریف، این عدد متعلق به T نیست. در عین حال ما آن را در 12 کلمه توصیف کرده‌ایم، بنابراین آن متعلق به T است. ما با یک تناقض آشکاری روبرو هستیم. چرا که اگر ما وجود مجموعه T را بپذیریم استدلال ذکر شده در فوق عاری از ابهام خواهد بود. یقیناً به این نتیجه می‌رسیم که مجموعه‌ای همچون T نمی‌تواند وجود داشته باشد. فرض اشاره شده در بطن پارادوکس بِری این است که توصیفی که یک عدد طبیعی را مشخص می‌کند در توصیف عدد دیگر دوباره نمی‌تواند استفاده شده باشد؛ یعنی نمی‌توان اعداد 3 و 4 را با مجموعه یکسان از کلمات تعریف کرد در حالی که بین آنها تفاوت نیز قائل شده‌ایم. پس برای نشان دادن اینکه پارادوکس بِری نادرست است، ما باید یک متن و گروهی از عبارات کمتر از 13 کلمه‌ایی

[۱۴] Berry

[۱۵] مجموعه تمام اعداد حقیقی بین 0 و 1 را نمی‌توان با تعداد متناهی از کلمه‌های یک زبان مشخص کرد.

[۱۶] خودنامصداق، کلمه‌ای است که در مورد خودش صدق نمی‌کند، مثلاً «آلمانی» خونامصداق است و «فارسی» خودمصداق.

را ایجاد کنیم تا بتوانیم ثابت کنیم که هیچ کرانی برای اعداد طبیعی که می‌توانند در کمتر از 13 کلمه توصیف شوند وجود ندارد. برای انجام این کار از این حقیقت استفاده می‌کنیم که اعداد طبیعی 0، 1، 2 ، ... به صورت مجموعه‌هایی قابل تعریف هستند. این نخستین بار توسط ددکیند[۱۷] در سال ۱۸۸۸ آورده شده است. پنج عدد نخست به شرح زیر تعریف شده‌اند:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\}$$

$$2 = \{0, 1\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\}$$

$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

اولین عدد طبیعی، 0، مجموعه تهی تعریف شده است (مجموعه‌ایی که هیچ عضوی ندارد و با نماد $\emptyset$ نمایش داده می‌شود)، 1 به عنوان مجموعه تك عضوی شامل 0 تعریف شده است، 2 به عنوان مجموعه شامل 0 و 1 تعریف شده است و ... . اکنون آماده برای توصیف اعداد طبیعی هستیم. ما توصیف آنها را در دنباله‌ایی از مراحل ترتیب خواهیم داد. در مرحله 1، ما اولین عدد طبیعی را توصیف خواهیم کرد، در مرحله 2، دومین عدد طبیعی را توصیف خواهیم کرد و ... .

مرحله 1: ما صفر را به صورت «مجموعه تهی، مجموعه‌ایی است که شامل هیچ عضوی نیست و با نماد $\emptyset$ نشان داده می‌شود» توصیف می‌کنیم (بنابراین$\emptyset = 0$).

مرحله 2: یک را به صورت «مجموعه‌ایی که شامل تنها عدد توصیف شده در مرحله قبل است» توصیف می‌کنیم (بنابراین$\{0\} = 1$).

مرحله 3: دو را به صورت «مجموعه‌ایی که تنها شامل همه اعداد توصیف شده در مراحل قبل است» توصیف می‌کنیم (بنابراین$\{0, 1\} = 2$).

مرحله 4: سه را به صورت «مجموعه‌ایی که متشکل از همه اعداد توصیف شده در مراحل قبل است» توصیف می‌کنیم (بنابراین$\{0, 1, 2\} = 3$).

مرحله 5: چهار را به صورت «مجموعه‌ایی که متشکل از همه اعداد توصیف شده در مراحل قبل

[۱۷] R. Dedekind

است» توصیف می‌کنیم (بنابراین$\{0, 1, 2, 3\} = 4$).

$\vdots$

در مراحل فوق ما به طور منحصربفرد سه عدد طبیعی 2 ، 3 و 4 را با استفاده از ترکیب یکسان کمتر از 13 کلمه توصیف کرده‌ایم. از آنجایی که می‌توانیم این روش را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، هیچ کرانی برای اعداد طبیعی که به این روش در کمتر از 13 کلمه قابل توصیف هستند وجود ندارد. بنابراین T، مجموعه تمامی اعداد طبیعی که می‌تواند در کمتر از 13 کلمه توصیف شوند، یک مجموعه نامتناهی است و پارادوکس برِی نادرست است.

تعاریف ارایه شده برای اعداد طبیعی در فوق دارای وابستگی متنی بوده و بایستی توصیفات قبلی آنها را نیز به عنوان بخش محذوف این توصیفات به حساب آوریم؛ ولی روندی که اعداد طبیعی را در قبل تعریف کرده‌ایم همانند روشی است که اعداد طبیعی به صورت مجموعه‌هایی استقرایی تعریف می‌شوند که این استقراء برای آنها ترتیبی را مشخص می‌نماید:

$$0 = \emptyset$$
$$1 = \{0\}$$
$$2 = \{0, 1\}$$
$$3 = \{0, 1, 2\}$$
$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

هر تعریفی (به غیر از تعریف اول) وابسته به مفهوم تعریف هر عدد قبل از آن می‌باشد. به عنوان مثال در نظر بگیرید، زمانی را که یکی از تعاریف را حذف می‌کنیم:

$$0 = \emptyset$$
$$1 = \{0\}$$
$$3 = \{0, 1, 2\}$$
$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

اگر مجموعه‌ایی که فقط شامل 0 و 1 می‌باشد وجود نداشت پس «2» یک نماد بی‌معنی است و باقی تعاریف شامل یك عدد بی‌معنی خواهند بود. به وضوح همه تعاریف به‌جز تعریف نخست، به تعاریف پیشین اشاره دارند و هیچ یک از تعاریف به غیر از تعریف اول، نمی‌تواند مستقل باشد. بنابراین می‌توان از توصیفات قبل به خوبی دفاع کرد چرا که به پیروی از مفهوم وابستگی، توصیف‌هایی درست‌تر از اکثر تعریفات مستقل برای اعداد طبیعی هستند. از آنجایی که نمی‌توانیم تعاریف اعداد طبیعی را بدون استفاده از تعاریف وابسته به متن ارایه دهیم، دلیلی موجه برای نپذیرفتن توصیفات وابسته به متن آنها نداریم. خصوصاً اینکه توصیفاتی وابسته به متن از اعداد ارایه دادیم درحالی که تعریف این اعداد طبیعی وابسته به متن هستند. از آنجا که هدف، دوباره برقرار کردن پارادوکس است، لزومی ندارد به طور قراردادی توصیفات وابسته به متن را محدود کنیم و صرفاً به این احتیاج داریم که فقط آن‌ها را از مجموعه‌ایی از خواص محروم کنیم و تمامی توصیفاتی که شامل کلمات وابسته مفهومی هستند همانند «قبلی» را حذف کنیم. برای مثال، به عنوان یک امکان، می‌توانیم کلمه «ناوابسته به متن» را به عنوان یک کلمه واحد به شمار آوریم و بگوئیم که کوچکترین عدد طبیعی که در کمتر از 13 کلمه ناوابسته به متن نمی‌تواند توصیف شده باشد، وجود دارد. این نسخه کاملاً ضعیفتر از پارادوکس اصلی است. برای اینکه این توصیف تناقض‌آمیز باشد، دو شرط می‌بایست برقرار باشد:

(1) توصیف در کمتر از 13 کلمه باشد.

(2) شامل هیچ کلمه وابسته به متن نباشد.

در واقع با برقرار کردن دو شرط، می‌توانیم ابزاری را ایجاد نمائیم که به وسیله آن از پارادوکس اجتناب شود، همانطور که در نظریه مجموعه زرملو- فرانکل (ZF) از پارادوکس راسل اجتناب شد. بحثی که در برابر پارادوکس ضعیف شده می‌توان مطرح کرد این است که یقیناً شامل حداقل یک کلمه وابسته مفهومی است زیرا اگر فرض کنیم که شامل چنین کلمه‌ایی نیست، به یک تناقض می‌رسیم. البته نیازی نداریم به اینکه این بیان را به عنوان بحث ارایه دهیم. صرفاً به این نکته احتیاج داریم که یکی از کلمات حتماً وابسته به متن است. به وضوح مجبور نیستیم که چیزی را پارادوکس فرض کنیم در حالی که یک جایگزین برای آن موجود است. بنابراین هر مانعی برای نشان دادن اینکه معمای بِری هیچ کلمه وابسته متنی در عبارت خود یعنی «کوچکترین عددی که نتوان آن را در کمتر از 13

کلمه غیروابسته به متن توصیف نمود» را ندارد، از بین می‌رود. روش این اثبات‌ها به نوعی تفسیر لغت مبهم «غیر وابسته به متن بودن» است، یعنی نشان می‌دهند که لغت «غیر وابسته به متن بودن» و بقیه لغات استفاده شده در توصیفات، مستقل از متن هستند. محققانی همچون تیلر بورگ[۱۸]، چارلز پارسونز [۱۹]و جان باروایز[۲۰] بر این عقیده‌اند که این لغات وابسته به متن هستند که ایجاد پارادوکس معنایی می‌کنند؛ به عنوان مثالی از یک لغت وابسته به متن می‌توانیم یک لغت توصیف شده را در نظر بگیریم. بحثی که در بطن پارادوکس برِی قرار می‌گیرد ناشی از یک درجه تجرید از دیگری است، یعنی توصیفی از جملات از مرتبه پایین‌تر (قبلی) برای جملات از مرتبه بالاتر (بعدی). توصیف یک عدد طبیعی به صورت «توصیف‌ناپذیر بودن در کمتر از 13 کلمه غیر وابسته به متن» یک توصیف مرتبه بالاتر است. یک توصیف غیرمستقیم براساس محدودیت‌های توصیفی از قبل فرض شده که این محدودیت‌ها (که در بحث ترکیبات متناهی از کلمات فارسی و مجموعه T برقرار بودند) باید قبل از اینکه توصیف را بپذیریم، توسط استدلال منطقی ارایه شده باشند. بحث منطقی متنی را ایجاد می‌کند که هم درون آن و هم به وسیله آن لغت «توصیف شده» بیان و توصیف می‌شود. بیرون این متن، این توصیف به صورت غیر وابسته وجود ندارد یعنی اگر بحث نادرست باشد (همان‌طور که در صورت اصلی پارادوکس اتفاق افتاد) این توصیف نیز نادرست خواهد بود. توصیفات مراتب پایین‌تر چنین وابستگی شدیدی ندارند. بنابراین لغت «توصیف شده» همزمان با حرکت بحث از مراتب پایین‌تر به مراتب تجرید بالاتر تغییر می‌کند.

پارادوکس آزمون ناگهانی

پارادوکس آزمون ناگهانی[۲۱] پارادوکسی‌است در مورد پیشنگری‌های شخصی در مورد زمان رویدادی که در آینده اتفاق خواهد افتاد. این پارادوکس قبل از سال ۱۹۴۰ میلادی ارایه شده است و عموماً

[۱۸] T. Burge

[۱۹] Ch. Parsons

[۲۰] J. Barwise

[۲۱] The Surprise Examination Paradox

تحت عنوان پارادوکس اعدام غیر منتظره یا پارادوکس مأمور اعدام[۲۲] یا پارادوکس پیشگویی[۲۳] یا پارادوکس دار غیر منتظره[۲۴] مطرح شده است که به شرح زیر می‌باشد [۲۱]:
در یک روز جمعه دادگاه شخصی را به مرگ محکوم کرد. قاضی به زندانی محکوم گفت: «ظهر یکی از روزهای هفته آینده، حکم اعدام تو اجرا خواهد شد، ولی ما آن روز را برای تو مشخص نخواهیم کرد و تو هرگز قبلاً از آن روز اطلاع پیدا نخواهی کرد و فقط شش ساعت قبل یعنی صبح روز اجرای حکم موضوع را به تو اطلاع خواهیم داد». قاضی مذکور شهره عالم به ذکاوت و وفای به عهد بود و همیشه دقیقاً به گفته خود عمل می‌کرد. زندانی به همراه وکیل مدافع خود به سلولش داخل شد و هر دو غمزده به فکر فرو رفتند. ناگاه وکیل مدافع با لبخندی سکوت را شکست و گفت: «اجرای حکم قاضی امکان ندارد». وکیل مدافع ادامه داد: «مسلماً آن‌ها روز جمعه آینده نمی‌توانند تو را اعدام کنند. به دلیل این که اگر فرضاً بخواهند روز جمعه آینده حکم را اجرا نمایند، در این صورت تو تمام روزهای هفته و همچنین بعد از ظهر پنجشنبه زنده خواهی بود و چون فقط روز جمعه یعنی یک روز دیگر به روزهای باقی مانده، بعد از ظهر پنجشنبه برای تو مسلم خواهد شد که فردا، یعنی روز جمعه و تنها روز آخر هفته، حکم اجرا خواهد شد. در نتیجه تو روز اجرای حکم را یک روز پیشتر پیش‌بینی کرده و قبل از صبح جمعه از آن اطلاع حاصل کرده‌ای و این موضوع نقض حکم قاضی بوده و گفته او را بی‌اعتبار خواهد کرد». زندانی گفته او را تصدیق کرد. وکیل مدافع ادامه داد: «بنابراین روز جمعه آینده از فهرست روزهای باقی‌مانده حذف و آن روز حکم غیر قابل اجراست. اما روز پنجشنبه نیز نمی‌توانند تو را اعدام کنند، چون بعد از ظهر چهارشنبه، دو روز بیشتر به آخر هفته نمانده و چون روز جمعه از فهرست حذف شد، تنها روز پنجشنبه آخرین روز اجرای حکم می‌باشد. در نتیجه بعد از ظهر چهارشنبه تو خواهی دانست در روز پنجشنبه، که آخرین روز اجرای حکم است، تو را اعدام خواهند کرد. اطلاع تو یک روز پیشتر از اجرای حکم مجدداً متناقض با حکم قاضی است. بنابراین پنجشنبه نیز حکم غیر قابل اجراست. چهارشنبه نیز امکان اجرای حکم وجود ندارد، چون جمعه و پنجشنبه حکم غیر قابل اجرا شد و فقط چهارشنبه آخرین روز اجرای حکم تشخیص داده شده و تو

[۲۲] Hangman Paradox

[۲۳] Prediction Paradox

[۲۴] Unexpected Hanging Paradox

که بعد از ظهر سه شنبه هنوز زنده هستی، اجرای حکم روز چهارشنبه را پیش‌بینی خواهی کرد و از آن اطلاع خواهی یافت». وکیل مدافع اضافه کرد: «به همین طریق می‌توان گفت روز سه‌شنبه و دوشنبه و یکشنبه نیز نمی‌توانند تو را اعدام کنند و فقط فردا یعنی شنبه باقی است. و اما فردا نیز اجرای حکم برای آن‌ها غیر ممکن است چون در این صورت تو امروز این موضوع را خواهی فهمید». ملاحظه می‌شود از لحاظ منطقی هیچ تناقضی در حکم قاضی جهت اعدام زندانی وجود ندارد، یعنی حکمش غیر قابل اجراست. طبق دلایل بالا به نظر می‌آید که حکم قاضی باعث نقض حکم خودش شده است، چرا که اگر حکم را اجرا کند، خلاف حکم خود عمل کرده و اگر اجرا نکند، باز هم خلاف حکم خود رفتار نموده است. با این وجود حکم اعدام روز دوشنبه اجرا می‌شود و زندانی درکمال ناباوری به دار آویخته می‌شود. زندانی تا قبل آن روز از اجرای حکم بی‌اطلاع بوده است و گفته قاضی هم به درستی اتفاق می‌افتد. بدین معنی که گفته قاضی بدون تناقض جلوه می‌کند و اجرای حکم، استدلال وکیل مدافع را زیر سوال می‌برد. ولی چه اشتباهی در استدلال وکیل مدافع وجود دارد؟ زندانی با یک منطق غیر قابل تردید متقاعد شده است که بدون نقض شرایطی که در حکم تشریح شده نمی‌توانند او را اعدام کنند ولی با کمال تعجب صبح دوشنبه مسئول اجرا وارد سلول می‌شود و به او خبر می‌دهد که ظهر آن روز حکم اجرا خواهد شد. مسلماً زندانی طبق دلایل وکیل مدافع خود چنین انتظاری نداشته و عجیب‌تر آن که اکنون ملاحظه می‌شود در حکم قاضی هیچ تناقضی وجود نداشته و اجرای حکم می‌تواند کاملاً مطابق پیشگویی‌های قاضی اجرا گردد [۲۱].

در سال ۱۹۵۱ مایکل اسکریون[۲۵] استاد کرسی منطق دانشگاه ایندیانا، مقاله پیچیده‌ای را در نشریه فلسفی «ذهن»[۲۶] منتشر کرد که در آن موضوع جدیدی بیان شده است و آن را «پارادوکس آزمون ناگهانی» نامیده است که به صورت زیر مطرح شده است [۲۶]:

آموزگاری به دانش‌آموزان اعلام می‌کند که هفته آینده (از شنبه تا پنج‌شنبه) آزمونی برگزار خواهد شد و آنان از روز این آزمون بی‌اطلاع خواهند بود (آزمون ناگهانی). دانش‌آموزان چنین استدلال می‌کنند که: آزمون در روز آخر (پنج‌شنبه) نمی‌تواند باشد، چون شب قبلِ آن، ما روزِ (تنها روز باقی‌مانده) آزمون را خواهیم فهمید. پس بناچار آزمون باید بین روزهای شنبه تا چهارشنبه باشد. باهمان استدلال بالا

[۲۵] Michael Scriven

[۲۶] Mind

امکان وقوع آزمون در روز چهارشنبه نیز نفی می‌گردد. پس آزمون بایستی بین روزهای شنبه تا سه‌شنبه واقع گردد ... تا آنجایی که دانش‌آموزان استدلال می‌کنند که چنین آزمون ناگهانی اصلاً نمی‌تواند اتفاق بیفتد. حال آنکه آموزگار روز دوشنبه آزمونی ناگهانی (بدون اطلاع قبلی) برگزار می‌کند و ....

البته قبل از اسکریون و در مدت ۱۵ سال قبل از انتشار این مقاله، بیش از ۱۰ مقاله مفصل درباره این پارادوکس در نشریه «ذهن» منتشر شده بود و کلیه نویسندگان آن (که اغلب از فلاسفه برجسته آن دوره بودند) دارای عقاید متضاد درباره راه حل آن بودند و چون حتی دو عقیده موافق درباره‌ی آن اظهار نشده است، پارادوکس مزبور لاینحل مانده و هنوز هم مورد بحث و مشاجره می‌باشد. از میان مقالات ارایه شده پیش از مقاله اسکریون می‌توان به بحث دونالد جان اُکانر[۲۷] (یکی از فلاسفه دانشگاه اکستر) در رابطه با پارادوکسی شبیه به این پارادوکس تحت عنوان پارادوکس اعلامیه فرمانده نظامی اشاره کرد که به بیان زیر می‌باشد:

در اعلامیه یک فرمانده نظامی آمده است: «برای تمرین در یکی از شب‌های هفته آینده آژیر خطر کشیده خواهد شد. شب تمرین در شش بعدازظهر همان روز به اطلاع عامه خواهد رسید و تا شش بعدازظهر کسی از شب موعود مطلع نخواهد شد». مشابه استدلال بالا می‌توان گفت که خود این اعلامیه ثابت می‌کند تمرین هرگز انجام نخواهد گرفت؛ به زبان دیگر اجرای این تمرین عملی نیست مگر اینکه از متن اعلامیه عدول شود.

صورتهای دیگری از این پارادوکس، همچون پارادوکس تخم مرغ غیر منتظره، پارادوکس پیک غیر منتظره و ... نیز مطرح شده‌اند. در واقع خاصیت صوری زبان اجازه می‌دهد که همه روزه تفسیرهای متعددی از پارادوکس شود. در اینجا به شرحی مختصر از پارادوکس تخم مرغ غیرمنتظره می‌پردازیم:

فرض کنید که ۱۰ جعبه مقوایی (که از ۱ تا ۱۰ شماره گذاری شده‌اند) در جلوی شما گذاشته شده باشد. وقتی که شما صورت خود را برمی‌گردانید، دوستتان یک عدد تخم مرغ در یکی از جعبه‌ها می‌گذارد و سر آن را مجدداً می‌بندد. دوستتان به شما می‌گوید: «یکی از جعبه‌ها را به ترتیب شماره باز کنید، قول می‌دهم که در داخل یکی از آن‌ها یک تخم مرغ غیرمنتظره خواهید یافت، مقصودم از کلمه غیر منتظره این است که شما قبل از باز کردن جعبه حاوی تخم مرغ و دیدن آن هرگز نمی‌توانید پیش‌بینی کنید کدامیک از جعبه‌ها دارای تخم مرغ است». فرض کنید که دوست شما شخصی عاقل

[۲۷] D. J. O'Connor

و قابل اعتماد باشد. آیا در این مورد نیز می‌توان به گفته او اعتماد کرد؟ مسلماً نه! واضح است که او تخم مرغ را در جعبه دهم نمی‌گذارد. زیرا پس از آن که شما 9 جعبه اولی را باز کردید و آن‌ها را خالی یافتید، قبل از باز کردن جعبه دهم، وجود تخم مرغ را در آن (که تنها جعبه باقی مانده است) پیشگویی می‌کنید و نتیجه آن نقض گفته دوستتان است. پس جعبه دهم از میدان عملیات خارج می‌شود. حال اگر دوستتان تخم مرغ را در جعبه نهم بگذارد، شما هشت جعبه اولی را خالی می‌بینید و فقط جعبه نهم و دهم باقی می‌ماند.طبق دلایل قبل در جعبه دهم نمی‌تواند باشد، پس شما آن را با اطمینان کامل در جعبه نهم پیش‌بینی می‌کنید و نادرستی گفته دوستتان نتیجه می‌شود. بنابراین جعبه نهم از میدان خارج می‌شود. جعبه هشتم نیز به همین دلیل منطقی نمی‌تواند حاوی تخم مرغ باشد و بالاخره جعبه‌های ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱. پس با اطمینان کامل پیش‌بینی می‌کنید که تمام جعبه‌ها خالی است و شروع به باز کردن یک یک آن‌ها می‌کنید تا حرف دوستتان را بی‌اعتبار کنید ولی ناگاه در جعبه پنجم تخم مرغ را مشاهده می‌کنید. با همه این دلایل، حرف دوستتان درست در می‌آید، یعنی دلایل شما را نادرست جلوه می‌دهد [۲۱].

۲.۱ پیچیدگی کولموگروف، عدد گذاری گودل و $\omega-$ سازگاری

نظریه الگوریتمی اطلاعات بخشی از علوم کامپیوتر است که پیچیدگی کولموگروف[۲۸] و اندازه‌گیری پیچیدگی‌های دنباله‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهد. مفهوم و نظریه پیچیدگی کولموگروف براساس یک قضیه بسیار مهم است که نخستین‌بار توسط رای سولومونف[۲۹] در سال ۱۹۶۰ مطرح شد. در سال ۱۹۶۵ آندری کولموگروف[۳۰] ریاضیدان مشهور روسی که در زمینه نظریه اطلاعات تحقیقاتی را انجام می‌داد با ارایه یک مقاله، پیچیدگی را با دیدی متفاوت تعریف کرد که به پیچیدگی کولموگروف یا پیچیدگی توصیفی معروف است. دنباله‌های دودویی زیر را در نظر بگیرید:

[۲۸] Kolmogorov Complexity

[۲۹] R. Solomonoff

[۳۰] A. Kolmogorov

$$010101010101010101010101$$

$$100111011101011100100110$$

$$110100110010110100101100$$

هر سه دنباله دارای 24 بیت می‌باشند با این تفاوت که دنباله اول را می‌توان یک دنباله دودویی با بیتهای (رقم‌های دودویی) 1 در جایگاه زوج و 0 در جایگاه فرد در نظر گرفت، دنباله سوم یک دنباله دودویی است که بیت iام آن 1 است اگر و تنها اگر در بسط دودویی i تعداد اعداد 1 فرد باشد، امّا در مورد دنباله دوم چیزی نمی‌توان گفت مگر آنکه برای توصیف آن، تک تک بیت‌ها آورده شود.
به ازای هر رشته x، پیچیدگی کولموگروف آن برابر طول کوتاهترین برنامه‌ای که x را تولید می‌کند، تعریف می‌شود. برای یک توصیف p از دنباله s، $d(p)$ برابر طول p می‌باشد (یعنی، تعداد نمادهای p). پیچیدگی کولموگروف دنباله s که با نماد $K(s)$ نمایش داده می‌شود برابر است با کوچکترین $d(p)$هایی که p توصیفی برای s است.

در این پایان‌نامه پیچیدگی کولموگروف به سه صورت مختلف زیر مطرح می‌شود:

$K(s) = \Big($طول کوتاهترین برنامه مولد $s\Big)$

$K'(s) = \Big($تعداد حالت‌های کوچکترین ماشین تورینگ مولد $s\Big)$

$\mu e\big(\varphi_e(0) = s\big) = K''(s) = \Big($کوچکترین اندیس تابع بازگشتی مولد s در نقطه $0\Big)$

عددگذاری گودل

کورت گودل روشی برای نمایش یک فرمول به وسیله اعداد بیان کرده است که امروزه به «عددگذاری گودل» معروف است. چندین شیوه برای معین نمودن اعداد گودل وجود دارد و ما همان شیوه‌ای را که گودل در سال ۱۹۳۱ در مقاله اصلی خود درباره ناتمامیت از آن استفاده نموده است بیان می‌کنیم. نمادهای مقدماتی شامل نمادهای ثابت و متغیرها می‌باشند. تعداد نمادهای ثابت را 10 عدد در نظر می‌گیریم که اعداد 1 تا 10 را به عنوان اعداد گودل به آنها نسبت می‌دهیم. مطابق جدول (۱.۱) عدد 1 را به $\neg$ (نقیض) نسبت می‌دهیم و می‌گوئیم که 1 عدد گودل نقیض می‌باشد. عدد 2 را به $\vee$ (فصل) به معنی «یا» نسبت می‌دهیم و الی‌آخر.

نمادهای ثابت	عدد گودل	معنی
$\neg$	1	نقیض
$\vee$	2	یا
$\rightarrow$	3	اگر... آنگاه...
$\exists$	4	وجود دارد
$=$	5	مساوی
0	6	صفر
S	7	تالی
(	8	پرانتز راست
)	9	پرانتز چپ
,	10	ویرگول

جدول ۱.۱: اعداد گودل نمادهای ثابت

علاوه بر نمادهای مقدماتی ثابت، سه نوع متغیر، متغیرهای فردی، متغیرهای جمله‌ایی و متغیرهای محمولی نیز در منطق موجودند که برای هر متغیر فردی x، y، z و ...، یک عدد اول بزرگتر از 10 و برای هر متغیر جمله‌ای p، q، r و ...، مربع یک عدد اول بزرگتر از 10 و برای هر متغیر محمولی P، Q، R و ...، مکعب یک عدد اول بزرگتر از 10 را نسبت می‌دهیم. جداول زیر اعداد گودل چند متغیر را نشان می‌دهند.

متغیرهای عددی	عدد گودل
x	11
y	13
z	17
$\vdots$	$\vdots$

جدول ۲.۱: اعداد گودل متغیرهای عددی

عدد گودل هر متغیر عددی برابر یک عدد اول بزرگتر از 10 می‌باشد.

متغیرهای جمله‌ای	عدد گودل
p	11^2
q	13^2
r	17^2
$\vdots$	$\vdots$

جدول ۳.۱: اعداد گودل متغیرهای جمله‌ای

عدد گودل هر متغیر جمله‌ای برابر مربع یک عدد اول بزرگتر از 10 می‌باشد.

متغیرهای محمولی	عدد گودل
P	11^3
Q	13^3
R	17^3
$\vdots$	$\vdots$

جدول ۴.۱: اعداد گودل متغیرهای محمولی

عدد گودل هر متغیر محمولی برابر مکعب یک عدد اول بزرگتر از 10 می‌باشد.

حال فرمول «$(\exists x)(x = Sy)$» (عدد y یک تالی دارد) را در نظر بگیرید. برای محاسبه عدد گودل این فرمول ابتدا اعداد گودل متناظر با نمادهای آن را می‌نویسیم که به صورت دنباله زیر حاصل می‌شود:

$$8 \quad 4 \quad 11 \quad 9 \quad 8 \quad 5 \quad 7 \quad 13 \quad 9$$

امّا بجای نسبت دادن مجموعه‌ای از اعداد مانند فوق به فرمول، بهتر است با استفاده از قضیه اساسی حساب (هر عدد صحیح مرکب را می‌توان به صورت منحصربفرد به عوامل اول تجزیه کرد) به هر فرمول یک عدد منحصربفردی نسبت دهیم که مطابق این قاعده، عدد گودل فرمول فوق به صورت زیر بدست می‌آید.

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^5 \times 17^7 \times 19^{13} \times 23^9$$

از این پس عدد گودل فرمول φ را با نماد $\ulcorner\varphi\urcorner$ نمایش می‌دهیم. پس

$$\ulcorner(\exists x)(x = Sy)\urcorner = 2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^5 \times 17^7 \times 19^{13} \times 23^9 .$$

و عدد گودل فرمول «$\neg x = 0$» طبق قاعده فوق برابر است با

$$\ulcorner\neg x = 0\urcorner = 2^1 \times 3^{11} \times 5^5 \times 7^6 = 475068 .$$

به‌طور مشابه، یک عدد منحصربفرد که حاصلضرب چند عدد اول، به تعداد نمادها (که هر عدد اول به توان عدد گودل نماد متناظر می‌رسد) است، به هر دنباله متناهی از نمادهای مقدماتی و به‌طور خاص، به هر فرمولی می‌توان نسبت داد. ممکن است نمادهایی در منطق ظاهر شوند که عدد گودل متناظر به آن نماد تعریف نشده است لذا این نمادها به کمک نمادهای تعریف شده، تعیین می‌شوند. برای مثال، نماد «$\wedge$» (عطف) به معنی «و» است که به صورت زیر تعریف می‌شود:
«$p \wedge q$» کوتاهنوشتی برای «$\neg(\neg p \vee \neg q)$» است و عدد گودل «$p \wedge q$» همان عدد گودل فرمول «$\neg(\neg p \vee \neg q)$» است. مشابهاً، نمادهای مختلف با تعریف زیر می‌توانند معرفی شوند:
1 برای «$S0$»، 2 برای «$SS0$»، 3 برای «$SSS0$» و ... . برای بدست آوردن عدد گودل فرمول «$\neg(2 = 3)$»، می‌توان آن را با فرمولهای تعریف شده به صورت «$\neg(SS0 = SSS0)$» نوشت و عدد گودل این فرمول را مطابق قاعده اظهار شده، بدست آورد. همچنین می‌توان دنباله‌ای از فرمول‌ها مانند φ_1، φ_2، φ_3 را به صورت

$$2^{\ulcorner\varphi_1\urcorner} \times 3^{\ulcorner\varphi_2\urcorner} \times 5^{\ulcorner\varphi_3\urcorner}$$

رمزنگاری کرد که در آن $\ulcorner\varphi_1\urcorner$ عدد گودل فرمول φ_1، $\ulcorner\varphi_2\urcorner$ عدد گودل فرمول φ_2 و $\ulcorner\varphi_3\urcorner$ عدد گودل فرمول φ_3 می‌باشد. البته لازم به ذکر است که هر عدد صحیحی، یک عدد گودل نیست. برای مثال عدد 100 را در نظر بگیرید. 100 بزرگتر از 10 است و بنابراین نمی‌تواند عدد گودل یک نماد ثابت مقدماتی باشد، و چون عدد اول بزرگتر از 10 یا مربع عدد اول بزرگتر از 10 و یا مکعب عدد اول بزرگتر از 10 نیست، پس عدد گودل یک متغیر نیز نمی‌تواند باشد. با تجزیه 100 به عوامل اول خواهیم داشت :

$$100 = 2^2 \times 3^0 \times 5^2$$

و از آنجایی که صفر عدد گودل هیچ نمادی نیست پس 100 نمی‌تواند به نماد ثابت، متغیرها یا فرمولها نسبت داده شود و بنابراین یک عدد گودل نیست. در زبان حساب (زبانی که در آن نماد ثابت 0 به منزله صفر، تابع یک موضعی S که تالی نامیده می‌شود و به عنوان اضافه کردن 1 تعبیر می‌شود و علامتهای $+$، $\times$ و $=$ که به تریب تعابیری برای جمع و ضرب و تساوی هستند، تعریف شده باشند) مجموعه اعداد گودل بازگشتی است، یعنی محاسبه‌پذیر است. به عبارت دیگر، ماشینی برای تصمیم‌گیری اینکه عدد معینی مانند n، عدد گودل فرمولی در این زبان است یا نه، موجود است.

ω-سازگاری

تعریف ۱.۲.۱. یك مجموعه Σ از فرمول‌ها را «سازگار» گویند اگر از آن یك تناقض حاصل نشود. به عبارت دیگر، فرمولی مثل α یافت نشود به‌طوری که هم $\Sigma \vdash \alpha$ و هم $\Sigma \vdash \neg\alpha$. در غیر اینصورت مجموعه را «ناسازگار» گوئیم. $\triangle$

تعریف ۲.۲.۱. نظریه T در یك زبان شامل $\{0, S\}$ که 0 نماد ثابت و S نماد تابعی یك موضعی است و $\overline{n} = \underbrace{SS...S}_{n-\text{بار}}(0)$، را ω-سازگار نامند هرگاه برای هر فرمول $\varphi(x)$ در زبان حساب، شرط زیر برقرار باشد:

اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\quad T \vdash \varphi(\overline{n}) \quad$ آنگاه $\quad T \nvdash \exists x \neg\varphi(x)$؛

به عبارت دیگر نظریه T، ω-سازگار است اگر فرمول $\varphi(x)$ موجود نباشد به طوری که $\forall n \in \mathbb{N}: \quad T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$ و در عین حال $T \vdash \exists x \varphi(x)$. $\triangle$

ω-سازگاری یك نظریه طبق گزاره زیر، سازگاری آن نظریه را نیز نتیجه می‌دهد امّا از سازگاری یك نظریه نمی‌توان ω-سازگاری آن را نتیجه گرفت.

گزاره ۳.۲.۱. *اگر نظریه T، ω-سازگار باشد آنگاه سازگار است.*

برهان. فرض می‌کنیم فرمول $B(x)$ فقط شامل یك متغیر آزاد x باشد و فرمول $\varphi(x)$ را به صورت $\varphi(x) = B(x) \wedge \neg B(x)$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $B(x) \wedge \neg B(x)$ یك تناقض می‌باشد پس $\neg\varphi(x)$ یك راستگو است. بنابراین $\forall n \in \mathbb{N}: \quad T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$ و چون بنابه فرض T، ω-سازگار است پس $T \nvdash \exists x \varphi(x)$. بنابراین نظریه T سازگار است. $\square$

مثال ۴.۲.۱. زبان $\mathcal{L}$ را به صورت $\mathcal{L} = \{0, S, \alpha\}$ که در آن S تابعی یک موضعی و α ثابت (مخالف صفر) است، در نظر گرفته و فرض می‌کنیم نظریه T با فرمولهای زیر اصل موضوعی شده باشد:

(1) $S(x) \neq 0$

(2) $S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

(3) $S(\alpha) = \alpha$

در این صورت برای هر تِرم t که فقط از 0 و S تشکیل شده است، با استقراء روی t در فرازبان ثابت می‌شود که $T \vdash \neg(S(t) = t)$ (با استفاده از (1) و (2))، بنابراین داریم $\forall n \in \mathbb{N}: T \vdash \neg S(\overline{n}) = \overline{n}$ و از طرفی طبق شرط (3)، یعنی $S(\alpha) = \alpha$، خواهیم داشت $T \vdash \exists x (S(x) = x)$. بنابراین نظریه T، ω-ناسازگار است، از طرف دیگر نظریه T سازگار است زیرا مجموعه $\mathcal{M} = \mathbb{N} \cup \{\mathfrak{a}\}$ با تعبیر $0^{\mathcal{M}} = 0$، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $S^{\mathcal{M}}(n) = n + 1$ و $S^{\mathcal{M}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ و $\alpha^{\mathcal{M}} = \mathfrak{a}$ مدلی برای T است. $\triangle$

فصل ۲

قضیه اول ناتمامیت گودل

۱.۲ قضیه اول ناتمامیت

در سال ۱۹۳۱ کورت گودل قضایای معروف ناتمامیت اول و دوم را ثابت کرد و دنیای ریاضی را متحول ساخت. در حقیقت قضایای ناتمامیت گودل نشان می‌دهند که نظریه‌ای سازگار در شاخه‌های به اندازه کافی قوی از ریاضیات منجر به یافتن گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر می‌شود که یک پاسخ منفی به دومین مسئله هیلبرت[۱] در رابطه با «آیا ریاضیات علمی کامل است؟» در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲. گوئیم تابع $f : \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ در نظریه T (یک نظریه برای حساب اعداد طبیعی) نمایش‌پذیر است هرگاه یک فرمول $\psi(x_1, ..., x_k, y)$ در T موجود باشد به‌طوری که برای هر $(n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}^k$ داشته باشیم:

$$T \vdash \forall y \Big(y = \overline{f(n_1, ..., n_k)} \longleftrightarrow \psi(\overline{n_1}, ..., \overline{n_k}, y) \Big)$$

همچنین اگر R يك رابطه kتایی روی $\mathbb{N}$ باشد یعنی $R \subseteq \mathbb{N}^k$، آنگاه محمول R را در نظریه T نمایش‌پذیر گوئیم هرگاه فرمولی مانند $\psi(x_1, ..., x_k)$ در زبان T چنان موجود باشد که برای هر $(n_1, ..., n_k) \in \mathbb{N}^k$،

$$\mathbb{N} \models R(n_1, ...n_k) \implies T \vdash \psi(\overline{n_1}, ..., \overline{n_k})$$

$$\mathbb{N} \models \neg R(n_1, ...n_k) \implies T \vdash \neg\psi(\overline{n_1}, ..., \overline{n_k}).$$

که در آن $\overline{n}$ برای $n \in \mathbb{N}$ برابر ترم $\overline{n} = \underbrace{SS...S}_{n-\text{بار}}(0)$ است. $\triangle$

تعریف ۲.۱.۲. نظریه‌ای را که در آن تمامی توابع بازگشتی، نمایش‌پذیر باشند، نظریه به اندازه کافی غنی گویند. $\triangle$

منظور از نظریه به اندازه کافی غنی که در بالا ذکر شده، هر نظریه‌ایی در مورد اعداد طبیعی است که در آن توابع بازگشتی، نمایش‌پذیر باشند. گودل در مقاله معروف خود قضیه اول ناتمامیت خود را به صورت زیر بیان کرده است:

[۱] D. Hilbert

قضیه ۳.۱.۲. (*قضیه اول ناتمامیت گودل*)*: برای هر نظریه سازگار ریاضی به اندازه کافی غنی مانند* ZFC *یا* PA*، جمله‌ای وجود دارد که نه خودش اثبات‌پذیر است و نه نقیض آن. به عبارتی دیگر، برای هر نظریه سازگار ریاضی به اندازه کافی غنی مانند* ZFC *یا* PA*، جمله‌ای وجود دارد که درست است ولی اثبات‌پذیر نیست.*

اثبات اصلی گودل برای قضیه اول ناتمامیت مبتنی بر پارادوکس دروغگو است. در واقع جوهر قضیه تاریخی گودل همان پارادوکس دروغگو است که از زمان یونان باستان شناخته شده بود. عبارت «این جمله نادرست است» را در نظر بگیرید. این جمله نه درست و نه نادرست می‌باشد. گودل حکم «این ادعا اثباتی ندارد» را مطرح کرده و با ترجمه آن به یک زبان صوری نشان داده که این حکم در هر نظریه که قادر به تعبیر حساب مقدماتی باشد، می‌تواند بیان شود. به عبارت دیگر، او نشان داد که اگر یک زبان صوری داشته باشیم به‌طوری که با استفاده از آن زبان بتوان درباره اعداد طبیعی و اعمال جمع و ضرب صحبت کرد آنگاه می‌توان عبارت «این ادعا اثباتی ندارد» را به این زبان ترجمه کرد. با توجه به این که هر دستگاه صوری که بخواهد کل ریاضیات را پوشش دهد خودبخود شامل اعداد طبیعی و اعمال بازگشتی مربوط به آن خواهد بود، پس ترجمه صوری عبارت «این ادعا اثباتی ندارد» یکی از گزاره‌های آن دستگاه خواهد بود. اگر حکم قابل اثبات باشد پس آن نادرست است، امّا از آنجایی که در یک نظریه سازگار و صحیح هر حکمی که قابل اثبات باشد می‌بایست درست باشد، پس نتیجه می‌گیریم که اگر نظریه سازگار و صحیح باشد، آنگاه حکم قابل اثبات نیست. لذا حکم در واقع درست است. بنابراین درصورت سازگار و صحیح بودن نظریه، نمونه‌ای از یک حکم درست اثبات‌ناپذیر را داریم. سختی اثبات اصلی گودل برای قضیه اول ناتمامیت خودارجاعی بودن (یا قطری‌سازی) عبارت «این ادعا اثباتی ندارد» است. برای بیان برهان گودل باید لم قطری‌سازی را بیان کنیم، در واقع لم قطری‌سازی وجود جملات خودارجاع در نظریه‌های صوری خاص از اعداد طبیعی را تصدیق می‌کند؛ به‌خصوص نظریه‌هایی که به اندازه کافی قوی برای نمایش همه توابع محاسبه‌پذیر هستند. برای این منظور ابتدا توابع و محمول‌هایی که گودل نمایش‌پذیری آنها را در نظریه T نشان داده است را مطرح می‌کنیم:

- $\mathsf{proof}_T(x,y)$ به معنی «x عدد گودل یک اثبات در نظریه T برای فرمولی با عدد گودل y است».
- $\mathsf{diag}(x)$ به این معنی که «اگر x عدد گودل یک فرمول مانند $A(y)$ با تنها متغیر آزاد y باشد، آنگاه

$\mathrm{diag}(x)$ عدد گودل فرمول $A(\ulcorner A\urcorner)$ می‌باشد» (یعنی فرمولی که از جایگزینی متغیر آزاد A با عدد گودل خود A به دست می‌آید).

- با کمک محمول $\mathsf{proof}_T(x,y)$ می‌توان محمول $\mathsf{provable}_T(y)$ به معنی «فرمول با عدد گودل y در T قابل اثبات است» را به صورت

$$\mathsf{provable}_T(y) \equiv \exists x(\mathsf{proof}_T(x,y))$$

تعریف کرد.

تعریف ۴.۱.۲. فرمولی که بتوان آن را به صورت $\exists x_1,...,x_n \quad A(x_1,...,x_n)$ نوشت که در آن $A(x_1,...,x_n)$ یك فرمول با سورهای کراندار است را Σ_1 فرمول گویند. (سورهای‌کراندار به شکل $\forall x(x \leqslant t \to ...)$ یعنی $\forall x \leqslant t...$ یا $\exists x(x \leqslant t \wedge ...)$ یعنی $\exists x \leqslant t....$ می‌باشند.) △

قضایای زیر را در این پایان‌نامه بدون اثبات می‌پذیریم [۱۸] ، [۱۵] و [۳]:

- Σ_1 تمامیت (برای هر Σ_1 فرمول σ): $\mathbb{N} \models \sigma \implies \mathtt{PA} \vdash \sigma$
- قاعده لزوم $(\mathtt{N})$: $\mathtt{PA} \vdash \varphi \implies \mathtt{PA} \vdash \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$
- قاعده $(\mathtt{K})$: $\mathtt{PA} \vdash \Big(\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \longrightarrow \big[\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\psi\urcorner)\big]\Big)$
- Σ_1 تمامیت صوری (برای هر Σ_1 فرمول σ): $\mathtt{PA} \vdash \sigma \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\sigma\urcorner)$
- قاعده (4): $\mathtt{PA} \vdash \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$

در واقع قواعد (K)، (N) و (4) سه شرط شناخته شده هیلبرت-بِرْنِی می‌باشند که در محمول اثبات‌پذیری در یك نظریه، شرایط کافی را برای اثبات قضایای ناتمامیت ارایه می‌کنند.

لم ۵.۱.۲. (*لم قطری‌سازی*): *برای هر فرمول* $B(y)$ *که فقط شامل یک متغیر آزاد* y *باشد، یک جمله* G *وجود دارد به طوری که:*

$$T \vdash G \longleftrightarrow B(\ulcorner G \urcorner)$$

برهان. فرض می‌کنیم $\varphi(x_1, x_2)$ نمایش دهنده تابع $diag(x)$ باشد. پس برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، اگر $diag(n) = m$ آنگاه $T \vdash \forall y(\varphi(\overline{n}, y) \longleftrightarrow y = \overline{m})$. حال فرمول $F(x)$ را برابر

$$\exists y(\varphi(x, y) \wedge B(y))$$

در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\ulcorner F \urcorner$ عدد گودل فرمول $F(x)$ باشد و G برابر فرمول

$$\exists x\big[x = \ulcorner F \urcorner \wedge \exists y\big(\varphi(x, y) \wedge B(y)\big)\big]$$

باشد. بنابراین G برابر فرمول $\exists x\big(x = \ulcorner F \urcorner \wedge F(x)\big)$ و به‌طور منطقی معادل $F(\ulcorner F \urcorner)$ یا

$$\exists y\big(\varphi(\ulcorner F \urcorner, y) \wedge B(y)\big)$$

است. G همان فرمول مورد نظر ما می‌باشد چون اگر $B(\ulcorner G \urcorner)$، آنگاه نتیجه می‌شود

$$\exists y\big(\varphi(\ulcorner F \urcorner, y) \wedge B(y)\big)$$

و این همان فرمول G است؛ اگر G، آنگاه از $\exists y\big(\varphi(\ulcorner F \urcorner, y) \wedge B(y)\big)$ نتیجه می‌شود:

$$\varphi(\ulcorner F \urcorner, \ulcorner G \urcorner) \wedge B(\ulcorner G \urcorner)$$

(چون $T \vdash \forall y\big[\varphi(\ulcorner F \urcorner, y) \longleftrightarrow y = \ulcorner G \urcorner\big]$) و در نتیجه $B(\ulcorner G \urcorner)$. □

حال اگر لم قطری‌سازی را برای محمول $\neg\mathsf{provable}_T(x)$ به کار ببریم، گزاره‌ای مانند G به دست می‌آید به طوری که:

$$T \vdash G \longleftrightarrow \neg\mathsf{provable}_T(\ulcorner G \urcorner) \qquad (۱.۲)$$

یعنی G در T اثبات‌پذیر است اگر و تنها اگر عدد گودل اثبات G موجود نباشد و عدد گودل اثبات G موجود نیست اگر و تنها اگر G در T قابل اثبات نباشد؛ و این همان گزاره‌ایی است که قضیه

گودل را ثابت می‌کند. اثبات گودل نشان می‌دهد که اگر T یک نظریه سازگار باشد آنگاه T جمله گودل (G) را نمی‌تواند اثبات کند ولی از طرف دیگر نشان می‌دهد که نقیض جمله گودل $(\neg G)$ نیز اثبات‌ناپذیر است. برای اثبات لازم است نه تنها شرط سازگاری بلکه شرط قوی $\omega-$سازگاری را نیز به خواص نظریه اضافه کنیم.

برهان. (قضیه اول ناتمامیت گودل)(۳.۱.۲). فرض می‌کنیم T یک نظریه ω-سازگار به اندازه کافی غنی باشد و گزاره G معرفی شده در لم فوق را در نظر می‌گیریم. حال ثابت می‌کنیم که $T \nvdash G$ و $T \nvdash \neg G$.

$\triangleleft$ $T \vdash G$ آنگاه با استفاده از رابطه (۱.۲) نتیجه می‌شود که

$$T \vdash \neg \mathsf{provable}_T(\ulcorner G \urcorner) \tag{۲.۲}$$

ولی بنابه شرط (N) هیلبرت-برِنْی از $T \vdash G$ نتیجه می‌گیریم که

$$T \vdash \mathsf{provable}_T(\ulcorner G \urcorner)$$

که با رابطه (۲.۲) در تناقض است. بنابراین $T \nvdash G$.

$\triangleleft$ $T \vdash \neg G$ آنگاه بنابه رابطه (۱.۲) نتیجه می‌شود که

$$T \vdash \mathsf{provable}_T(\ulcorner G \urcorner) \equiv \exists z \big(\mathsf{proof}_T(z, \ulcorner G \urcorner)\big)$$

حال با فرض اینکه نظریه T، $\omega-$ سازگار است نتیجه می‌شود که nای موجود است که

$$T \nvdash \neg \mathsf{proof}_T(n, \ulcorner G \urcorner)$$

در نتیجه $\neg \mathsf{proof}_T(n, \ulcorner G \urcorner)$ که فرمولی Σ_1 است درست نبوده، پس $\mathsf{proof}_T(n, \ulcorner G \urcorner)$ درست است یعنی اثباتی برای G در T وجود دارد، پس $T \vdash G$ و از طرفی بنابه فرض $T \vdash \neg G$ و این با سازگاری T در تناقض است. بنابراین $T \nvdash \neg G$. $\square$

در سال ۱۹۳۶ بارکلی راسِر[۲] اثباتی برای قضیه اول ناتمامیت ارایه داد که مشابه اثبات اصلی گودل است با این تفاوت که او نشان داده که می‌توان فرمول $\mathsf{proof}_T(x, y)$ را طوری تعریف کرد که

[۲] J. B. Rosser

به شرط ω–سازگاری نیازی نباشد، که تحت عنوان «کَلَک راسِر» شناخته می‌شود. در اثبات اصلی گودل از جمله صوری شده «این جمله اثبات‌پذیر نیست» استفاده شده، در حالیکه کَلَک راسِر از جمله صوری «اگر این جمله اثبات‌پذیر است، یک اثبات کوتاه برای نقیض آن موجود است» استفاده کرده است. راسِر یک جمله خودارجاعی متفاوت را بیان کرد که می‌تواند جایگزین جمله گودل در اثبات گودل باشد که نیاز به فرض ω–سازگاری نظریه را برطرف می‌کند. در واقع راسِر فرمول $\mathsf{proof}_T(x,y)$ را به شکل تعدیل یافته زیر بیان کرد:

$$\mathsf{Rproof}_T(x,y) \equiv \mathsf{proof}_T(x,y) \wedge \neg\exists z \leqslant x \;\; [\mathsf{proof}_T(z, \ulcorner\neg G\urcorner)]$$

پس

$$\neg\mathsf{Rproof}_T(x,y) \equiv \mathsf{proof}_T(x,y) \longrightarrow \exists z \leqslant x \;\; [\mathsf{proof}_T(z, \ulcorner\neg G\urcorner)]$$

و همچنین خواهیم داشت:

$$\mathsf{Rprovable}_T(y) \equiv \exists x \mathsf{Rproof}_T(x,y)$$

در واقع، $\mathsf{Rprovable}_T(y)$ ادعایی است برای اینکه فرمول با عدد گودل y قابل اثبات است به‌طوری که عدد گودل کوچکتری برای اثباتی از نقیضِ فرمول با عدد گودل y موجود نباشد. بنابه سازگاری نظریه T، برای هر فرمول φ فرمول $\mathsf{Rprovable}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ برقرار خواهد بود اگر و تنها اگر $\mathsf{provable}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ برقرار باشد. با استفاده از لم قطری‌سازی فرض می‌کنیم R یک فرمول باشد به‌طوری که

$$T \vdash R \longleftrightarrow \neg\mathsf{Rprovable}_T(\ulcorner R\urcorner) \tag{۳.۲}$$

فرمول R جمله راسِر نظریه T است.

قضیه ۶.۱.۲. *(قضیه راسِر): فرض می‌کنیم T یک نظریه سازگار و به اندازه کافی غنی باشد و R یک جمله راسِر باشد. آنگاه دو شرط زیر برقرارند:*

(۱) $T \nvdash R.$

(۲) $T \nvdash \neg R.$

برهان. اثبات **(۱)** همانند اثبات گودل برای اولین قضیه ناتمامیت است. فرض می‌کنیم $T \vdash R$. پس طبق شرط (N) هیلبرت-بِرْنِی خواهیم داشت

$$T \vdash \mathsf{Rprovable}_T(\ulcorner R \urcorner)$$

و از طرفی طبق رابطه (۳.۲)

$$T \vdash R \longleftrightarrow \neg \mathsf{Rprovable}_T(\ulcorner R \urcorner)$$

و این با سازگاری نظریه T در تناقض است، پس $T \nvdash R$.

حال برای اثبات **(۲)**، فرض می‌کنیم که $T \vdash \neg R$ و $n \in \mathbb{N}$ عدد گودل اثبات فرمول $\neg R$ در T باشد. چون T سازگار است پس اثباتی برای فرمول R در T وجود ندارد. حال $\mathsf{Rproof}_T(n, \ulcorner \neg R \urcorner)$ برقرار است. (زیرا $n < z$ که z عدد گودل اثبات فرمول $\neg\neg R$ باشد وجود ندارد). فرض اینکه T به اندازه کافی غنی است تضمین می‌کند که

$$T \vdash \forall x \big[n \leqslant x \longrightarrow \exists z \leqslant x \ \ \big(\mathsf{proof}_T(z, \ulcorner \neg R \urcorner)\big)\big]$$

و (با استفاده از فرض سازگاری و این حقیقت که n یک عدد طبیعی است)

$$\mathbb{N} \models \neg \exists x < n \ \big[\mathsf{proof}_T(x, \ulcorner R \urcorner)\big]$$

بنابه فرمول اخیر، $\mathsf{proof}_T(x, \ulcorner R \urcorner) \longrightarrow n \leqslant x$ پس

$$T \vdash \forall x \big[\mathsf{proof}_T(x, \ulcorner R \urcorner) \longrightarrow \exists z \leqslant x \ \ \mathsf{proof}_T(z, \ulcorner \neg R \urcorner)\big]$$

امّا این فرمول معادل $T \vdash R$ است و این تناقض است چون فرض کرده‌ایم که T سازگار است و $T \vdash \neg R$. پس با فرض سازگاری T خواهیم داشت $T \nvdash \neg R$. $\square$

اثبات‌های متعددی برای قضیه اول ناتمامیت گودل ارایه شده‌اند. همچنان که گودل در مقاله اصلی خود اشاره می‌کند، به جای پارادوکس دروغگو می‌توان از دیگر پارادوکس‌ها نظیر پارادوکس بِری بهره جست. درستی استدلال‌هایی مانند استدلال گودل، از دیدگاه فیلسوفان (نه ریاضیدانان) اغلب مورد سوال بوده است و اولین تلاش برای حمایت از ادعای گودل، اثبات قضیه (بدون ارجاع به قطری‌سازی) با استفاده از پارادوکس‌های دیگر اخیراً باب شده است.

۲.۲ ناتمامیت شایتین

اثباتی که توسط شایتین[۳] برای قضیه اول ناتمامیت ارایه شده مبتنی بر پارادوکس بِری می‌باشد که به ناتمامیت شایتین معروف است. شایتین برای صوری کردن پارادوکس بِری، از مفهوم پیچیدگی کولموگروف استفاده کرده است. پیچیدگی حالت $K'(s)$ دنباله متناهی دودویی s برابر تعداد حالتهای کوچکترین ماشین تورینگ سه نواره است که s را تولید می‌کند. این مفهومی از پیچیدگی داده‌هاست. توجه داشته باشید که $(6n)^{3n}$ ماشین تورینگ سه نواره با n حالت وجود دارد. زیرا طبق تعریف ماشین تورینگ، تابع جزئی τ را مطابق زیر داریم:

$$\tau : Q \times (\Sigma \cup \{B\}) \longrightarrow Q \times (\Sigma \cup \{B\}) \times D$$

که در آن Q مجموعه حالات (به تعداد n عضو) و Σ مجموعه متناهی از نمادها $\{0,1\}$ و D عملگرهای حرکت به چپ، حرکت به راست است. در واقع ضریب 6 از 6 عملگر حرکت به چپ، حرکت به راست، توقف، نوشتن یک، نوشتن صفر و پاک کردن ناشی می‌شود. پس، فقط تعداد متناهی دنباله‌های دودویی با طول متناهی s وجود دارند که دارای پیچیدگی حالت n داده شده هستند یعنی در معادله $K'(s) = n$ صدق می‌کنند. هر نظریه صوری سازگار T دارای این خاصیت خواهد بود که «اگر $\overline{n} < K'(s)$ در T اثبات‌پذیر باشد آنگاه $n < K'(s)$ درست است»، مگر آنکه روش‌های استنتاج در نظریه T بسیار بسیار ضعیف باشند. زیرا اگر $n < K'(s)$ درست نباشد آن‌گاه یک ماشین تورینگ سه نواره وجود دارد که s را محاسبه می‌کند و چون این محاسبات متناهی است، با اجرای مرحله به مرحله آن، T می‌تواند ثابت کند که آن درست کار می‌کند یعنی آن ماشین تورینگ s را محاسبه می‌کند، پس $K'(s) \leqslant \overline{n}$ را ثابت می‌کند.

به عبارت دیگر (از Σ_1 کامل بودن T و Σ_1 جمله بودن $K'(s) \leqslant \overline{n}$) داریم

$$\mathbb{N} \models K'(s) \leqslant n \implies T \vdash K'(s) \leqslant \overline{n}$$

حال ثابت می‌کنیم که

$$\mathbb{N} \models n < K'(s) \;\;\not\Longrightarrow\;\; T \vdash \overline{n} < K'(s)$$

[۳] G. Chaitin

قضیه ۱.۲.۲. *برای هر نظریه صوری سازگار T ثابت n موجود است به‌طوری که برای هیچ دنباله متناهی دودویی s، جمله $\overline{n} < K'(s)$ در T قابل اثبات نیست و چون برای هر n دنباله دودویی t موجود است که $\mathbb{N} \models n < K'(t)$ پس جمله $\overline{n} < K'(t)$ درست ولی در T اثبات‌پذیر نیست.*

برهان. فرض می‌کنیم (فرض خلف) که برای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ داده شده حداقل یک دنباله متناهی دودویی s موجود است به‌طوری که $n < K'(s)$ یک قضیه در T است، یعنی $n < K'(s)$ قابل اثبات در T است. نشان می‌دهیم که ماشین تورینگ سه نواره با $(\lceil log_2^n \rceil + c_T)$ حالت موجود است که دنباله متناهی دودویی s که در $n < K'(s)$ صدق می‌کند را محاسبه می‌کند. ثابت c_T مستقل از n است و تنها به T بستگی دارد. ساختار این ماشین تورینگ به شرح زیر است:
ابتدا $\lceil log_2^n \rceil$ حالت، عدد n را روی نوار ماشین تورینگ به صورت دودویی نمادگذاری می‌کنند و c_T حالت باقیمانده کار زیر را انجام می‌دهند. از آنجایی که T یک نظریه صوری است پس مجموعه اصول T شمارای کارآمد است. پس یک ماشین تورینگ موجود است که اصول T را لیست می‌کند و ماشین تورینگ دیگری قضایای T را لیست می‌کند. تعداد حالت‌های این ماشین تورینگ را c_T در نظر می‌گیریم. پس این ماشین، هر رشته متناهی از حروف الفباء (الفبای ماشین به صورت دودویی است) از نظریه صوری T را در نظر می‌گیرد و بررسی می‌کند که دستورالعمل یک اثبات است یا نه، اگر دستور العمل یک اثبات باشد آن‌گاه ماشین آخرین عضو را خروجی می‌دهد که همان قضیه می‌شود. پس ماشین، هر قضیه اثبات‌پذیر در T را تولید می‌کند و همچنین هر قضیه تولید شده، از لحاظ این که به شکل $n < K'(s)$ است، می‌تواند بررسی شود. پس از مواجه شدن با اولین قضیه‌ایی که به صورت $n < K'(s)$ است، دنباله متناهی دودویی s را که توسط ماشین تورینگ محاسبه می‌شود را فراهم می‌کند. ماشین تورینگ با تعداد $\lceil log_2^n \rceil + c_T$ حالت، s را تولید می‌کند. پس $n < K'(s) \leqslant \lceil log_2^n \rceil + c_T$، که نتیجه می‌دهد $n < \lceil log_2^n \rceil + c_T$؛ و این تناقض است زیرا $n > \lfloor log_2^n \rfloor$ برای nهای به اندازه کافی بزرگ برقرار است. توجه داریم که به استقراء روی $m \geqslant 5$ می‌توان نشان داد که $2^m > m^2$؛ و نیز برای $n > max\{5, a\}$ می‌توان به استقراء روی n نشان داد که $2^n > n.a$ زیرا با فرض استقراء داریم

$$2^{n+1} = 2^n.2 > n.a.2 = n.a + n.a > n.a + a = (n+1).a$$

پس برای $n > max\{5, 2^{c_T+1}\} = n_T$ داریم $2^n > n.2^{c_T+1}$ بنابراین $n \geqslant \lceil log_2^n \rceil + c_T$ و تناقض

خواسته شده حاصل می‌شود. پس $n < K'(s)$ برای هیچ دنباله متناهی دودویی s، در T قابل اثبات نیست. نتیجه می‌گیریم که $n < K'(s)$ در صورت $n \geqslant n_T$، نمی‌تواند در T اثبات شود. □

این روش مشابه پارادوکس بِری است زیرا می‌توان

«کوچکترین عدد طبیعی در کمتر از 10000000 کاراکتر قابل توصیف نیست»

را به شرح زیر بازنویسی کرد:

«دنباله متناهی s با اولین برهان این حقیقت که s نمی‌تواند توسط یک ماشین تورینگ با n حالت یا کمتر توصیف شود، یک توصیف با تعداد $(log_2^n + c_T)$ حالت از s است».

در سال ۱۹۹۸، ج. بولوس[۴] نیز با بیان پارادوکس بِری، نسخه معنایی قضیه اول ناتمامیت را اثبات کرد، با نشان دادن اینکه جملاتی حسابی وجود دارند که درست هستند امّا در نظریه‌های به اندازه کافی قوی قابل اثبات نیستند. در واقع بولوس قضیه اول ناتمامیت را چنین بیان می‌کند که الگوریتمی که خروجی آن شامل همه جملات درست باشد و شامل هیچ نادرستی نباشد، وجود ندارد. منظور از الگوریتم یک روند محاسباتی (اتوماتیک، موثر، مکانیکی) از نوع معمول است. به‌طور مثال یک برنامه کامپیوتری در زبانی مانند C، BASIC، LISP، ... و یا یک ماشین تورینگ، ماشین ثبت یا الگوریتم مارکوف. در واقع بولوس با اثبات قضیه اول ناتمامیت بر مبنای پارادوکس بِری دلیلی دیگر و متفاوت برای ناتمامیت الگوریتم‌ها را ارایه می‌دهد؛ رجوع شود به مراجع [۲] و [۲۳]. کیکوچی[۵] با اصلاح روش بولوس برای نام‌گذاری (کُد کردن)، صورت نحوی قضیه ناتمامیت اول را برای توسیع‌های مناسبی از حساب پئانو به دست آورد، رجوع شود به مرجع [۱۰]. همچنین اثبات‌های دیگری برای قضیه اول ناتمامیت شناخته شده‌اند، مراجع [۱۲] و [۲۰] را ببینید.

[۴] G. Boolos

[۵] M. Kikuchi

۳.۲ مسئله توقف و قضیه اول ناتمامیت

قضیه اول ناتمامیت گودل نشان می‌دهد که علم حساب نمی‌تواند به صورت کامل در رابطه با اثبات‌پذیری خودش صحبت کند. مساله توقف نشان می‌دهد که کامپیوترها نمی‌توانند به صورت کامل در ارتباط با خاصیت کامپیوتری که توقف خواهد نمود یا در حلقه بی‌نهایت (دور بی‌پایان) خواهد افتاد بحث کنند [۲۴].

قضیه ۱.۳.۲. (*حل‌ناپذیری مسئله توقف*): *الگوریتمی وجود ندارد که با یك ماشین تورینگ و یك عددطبیعی به عنوان ورودی ماشین تعیین کند که ماشین با این ورودی متوقف می‌شود یا نه.*

از حل‌ناپذیری مسئله توقف می‌توان اثباتی برای قضیه اول ناتمامیت گودل به دست آورد. می‌توان نشان داد که همه توابع محاسبه‌پذیر در ZFC یا هر نظریه مشابه نمایش‌پذیراند، پس تمام گزاره‌ها به صورت «ماشین M با ورودی n بالاخره متوقف می‌شود» و یا «ماشین M با ورودی n متوقف نمی‌شود» در زبان آن قابل بیان‌اند. یک نظریه حساب می‌تواند هر گزاره درست به فرم «ماشین M با ورودی n بالاخره متوقف می‌شود» را ثابت کند ولی گزاره‌هایی از نوع «ماشین M با ورودی n متوقف نمی‌شود» وجود دارند که درست هستند ولی نظریه قادر به اثبات آنها نیست.

قضیه ۲.۳.۲. *در هر نظریه برای حساب، گزاره‌ای به فرم «ماشین M با ورودی n متوقف نمی‌شود» وجود دارد که درست است ولی غیر قابل اثبات است.*

برهان. اگر همه گزاره‌های به صورت «ماشین Mبا ورودی n متوقف نمی‌شود» در نظریه قابل اثبات بودند آنگاه یک الگوریتم برای حل مسئله توقف به دست می‌آمد: در مجموعه قضایای نظریه، قضایای به شکل فوق را جستجو می‌کردیم و سرانجام به اثبات یکی از گزاره‌های «ماشین M با ورودی n متوقف نمی‌شود» یا «ماشین M با ورودی n بالاخره متوقف می‌شود» می‌رسیدیم (چون این دو گزاره متناقضند و در نتیجه یکی از آنها حتماً درست است) و به این طریق مشخص می‌شد که ماشین M با ورودی n متوقف می‌شود یا نه. و این متناقض با حل‌ناپذیری مسئله توقف است. □

فصل ۳

قضیه دوم ناتمامیت گودل

۱.۳ قضیه دوم ناتمامیت

ابداع فرگه[۱] در خصوص ترجمه منطق به شکل صوری محض، کاربرد شیوه‌های استدلال ریاضی را برای ساختارهای صوری نظریه‌های منطقی ممکن می‌ساخت. گام بنیادی هیلبرت در صوری‌سازی کامل منطق بر اساس تعدادی اصول موضوعه و اثبات سازگاری آنها، متضمن چنین کاربردی است. پیشنهاد هیلبرت در خصوص اثبات سازگاری نظریه‌های پیچیده‌تر، همچون آنالیز حقیقی، به وسیله نظریه‌های ساده‌تر انجام می‌شود و سرانجام سازگاری همه ریاضیات به حساب مقدماتی فرو کاسته می‌شود. امّا این همان چیزی است که قضیه دوم ناتمامیت گودل اجازه آن را نمی‌دهد، چرا که بر اساس آن حساب مقدماتی نمی‌تواند سازگاری خودش را اثبات کند، پس به طریق اولی نمی‌تواند در اثبات سازگاری نظریه‌های قوی‌تر مورد استفاده قرار گیرد.
تفسیر ذیل از قضیه دوم ناتمامیت چنان که گفته شد، برای مبانی ریاضیات مشکل آفرین‌تر است: «اگر نظریه‌ایی بتواند سازگاری خود را در درون خود نظریه اثبات کند، آنگاه آن نظریه ناسازگار است». برای مثال سازگاری اصول موضوعه پئانو برای اعداد طبیعی می‌تواند در نظریه مجموعه‌ها اثبات شود، امّا در نظریه اعداد طبیعی به تنهایی نمی‌تواند. این در واقع پاسخی منفی به مسئله دوم هیلبرت محسوب می‌شود.

قضیه ۱.۱.۳. (*قضیه دوم ناتمامیت گودل*): *برای هر نظریه صوری به اندازه کافی غنی از اصول* T[۲] *خواهیم داشت:*

$$\Big[T \vdash \mathsf{Con}(T)\Big] \iff \Big[T \text{ ناسازگار است}\Big]$$

(*در اینجا* Con *بخشی از کلمه «*Consistency*» به معنای سازگاری می‌باشد.*)

برهان. قضیه دوم ناتمامیت به‌طور مستقیم از اثبات اصلی گودل برای قضیه اول ناتمامیت که در فصل قبل آن را بیان کردیم، نتیجه می‌شود. گودل حکم «این ادعا اثباتی ندارد» را بیان کرده و نشان داده است که، در صورت سازگار بودن نظریه، این حکم (در $\mathbb{N}$) درست است، ولی در درون نظریه

[۱] G. Ferege

[۲] در این پایان‌نامه برای سادگی نظریه T را PA در نظر می‌گیریم. بنابراین هر اثبات ریاضی و بخصوص هر اثباتی در این پایان‌نامه، در داخل نظریه T بدست آمده است.

اثبات‌پذیر نیست. از آنجایی که اثبات درست بودن این ادعا می‌تواند در داخل هر نظریه به اندازه کافی قوی مانند حساب پئانو (PA) یا ZFC به دست آید، پس اگر سازگاری نظریه نیز بتواند در داخل نظریه اثبات شده باشد، آنگاه عبارت «این ادعا اثباتی ندارد» می‌تواند در داخل نظریه اثبات شود، که یک تناقض است. به عبارت دیگر، از آن‌جا که برای درستی جمله گودل «G_T» سازگاری نظریه T را مفروض گرفتیم، می‌توانیم جمله اثبات شده توسط این نظریه را با $\mathsf{Con}(T) \longrightarrow G_T$ نمایش دهیم. فرض می‌کنیم که $\mathsf{Con}(T)$ در T اثبات‌پذیر باشد، یعنی $T \vdash \mathsf{Con}(T)$؛ آنگاه با اعمال قاعده وضع مقدم (MP)، G_T نیز می‌بایست در T اثبات‌پذیر باشد، یعنی $T \vdash G_T$. در حالیکه طبق قضیه اول ناتمامیت G_T در T اثبات‌پذیر نیست (تناقض)؛ پس $T \nvdash \mathsf{Con}(T)$. □

به عنوان مثال، اگر عبارت $S(1) = 0$ (صفر، تالی عدد یک است) را در نظر بگیریم، آنگاه این در تناقض با اصل موضوعی است که می‌گوید: صفر تالی هیچ عددی نیست. پس اگر بتوانیم این فرمول را ثابت کنیم، آنگاه دستگاه ناسازگاری خواهیم داشت و اگر دستگاه ناسازگاری داشته باشیم، آنگاه می‌توانیم این فرمول را ثابت کنیم. بنابراین، اثبات‌پذیری این فرمول معادل با ناسازگاری نظریه است. در واقع قضیه دوم ناتمامیت بیان می‌کند که دستگاه حساب برای اثبات سازگاری خود کافی نیست و البته هر توسیعی از حساب نیز این نقص را دارد. بنابراین امیدی نمی‌ماند که سازگاری کل ریاضیات را با دستگاهی صوری برای کل ریاضیات ثابت کرد. امّا قبل از کار گودل، امید این وجود داشت که می‌توان اثبات‌پذیری $\mathsf{Con}(T)$ را از فرضهای ضعیفتری از اصول موضوع نظریه مجموعه‌ها به دست آورد، امّا در حال حاضر می‌بینیم که $\mathsf{Con}(T)$ در هیچ زیر نظریه T قابل اثبات نیست؛ مگر اینکه T ناسازگار باشد.

با این حال، قضیه دوم ناتمامیت از اثباتهای شایتین و بولوس برای قضیه اول ناتمامیت نتیجه نمی‌شود. چرا که این اثبات‌ها بدون ارایه یک مثال صریح، تنها وجود یک حکم درست (در $\mathbb{N}$) که هیچ اثباتی ندارد را نشان می‌دهند.

۲.۳ اثباتی جدید برای قضیه دوم ناتمامیت

چندین اثبات جدید و متفاوت برای قضیه دوم ناتمامیت گودل ارایه شده‌اند که اثبات مطرح شده در این بخش یکی از جدیدترین آنهاست. در واقع در این بخش به بررسی اثباتی که توسط کریچمن[۳] و راز[۴] (مرجع [۱۴]) برای قضیه دوم ناتمامیت مبتنی بر ناتمامیت شایتین و استدلالی مشابه پارادوکس آزمون ناگهانی ارایه شده است، می‌پردازیم. این اثبات می‌تواند اولین راه حل قابل قبول منطقی برای حل پارادوکس آزمون ناگهانی باشد. ابتدا اثبات شایتین برای قضیه اول ناتامیت را به مختصرتر از آنچه که در اثبات اصلی در فصل قبل بیان کردیم، تکرار می‌کنیم.

پیچیدگی کولموگروف $K(x)$ از عدد صحیح x، طول (بیت) کوتاهترین برنامه کامپیوتری که خروجی آن x است (و متوقف می‌شود) تعریف شده است. تعریف $K(x)$ در یک زبان برنامه‌نویسی ثابت همچون LISP، پاسکال یا C است. با در نظر گرفتن یک ماشین تورینگ جهانی، $K(x)$ را می‌توان تعریف نمود. قضیه ناتمامیت شایتین بیان می‌دارد که برای هر نظریه سازگار ریاضی به اندازه کافی غنی، عدد صحیح به اندازه کافی بزرگ n موجود است (وابسته به نظریه و زبان برنامه‌نویسی که در تعریف پیچیدگی کولموگروف استفاده شده است) به‌طوری که برای هر عدد صحیح x، حکم «$n < K(x)$» در داخل نظریه نمی‌تواند اثبات شود. اثبات ارایه شده توسط شایتین به شرح زیر است:

فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح به اندازه کافی بزرگ باشد، همچنین فرض می‌کنیم (فرض خلف) که برای حکم «$n < K(x)$» که x عدد صحیحی است، اثباتی موجود باشد. w را اولین اثبات برای حکمی به صورت «$n < K(x)$» در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که z کوچکترین عدد صحیح x باشد به‌طوری که w، $n < K(x)$ را اثبات می‌کند. به آسانی می‌توان یک برنامه کامپیوتری که خروجی z را می‌دهد به شرح زیر بیان کرد:

برنامه تمام اثباتهای ممکن w را یکی یکی می‌شمارد و برای اولین wای که حکمی به صورت «$n < K(x)$» را اثبات می‌کند، خروجی x را می‌دهد و متوقف می‌شود. طول این برنامه برابر

[۳] Sh. Kritchman

[۴] R. Raz

$c + \log(n)$ می‌باشد که در آن c یک ثابت است. بنابراین، اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، پیچیدگی کولموگروف w، کوچکتر از n است؛ یعنی $(K(z) < n)$. از آنجایی که w یک اثبات برای «$n < K(z)$» است (که یک حکم نادرستی است)، نتیجه می‌گیریم که نظریه ناسازگار است. توجه داشته باشید که تعداد برنامه‌های کامپیوتری از طول حداکثر n بیت (کوچکتر یا مساوی n بیت) برابر 2^{n+1} است، زیرا $2^0 + 2^1 + ... + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1}$. از این‌رو برای هر عدد صحیح n، عدد صحیح $0 \leqslant x \leqslant 2^{n+1}$ موجود است به‌طوری که $n < K(x)$. برای این عدد صحیح x، حکم «$n < K(x)$» (در $\mathbb{N}$) یک حکم درستی است که اثباتی ندارد.

حال به بررسی اثبات جدید می‌پردازیم. همان‌طور که در فصل ۱ بیان کردیم، پارادوکس آزمون ناگهانی موجب بحث و جدلهای بسیاری بین فلاسفه گردیده است و تا مدتها حل نشده باقی بود. در این پایان‌نامه، این نوع استدلال پارادوکس‌نما به یک برهان برای قضیه دوم ناتمامیت گودل منجر می‌شود. فرض می‌کنیم T یک نظریه به اندازه کافی غنی و n عدد صحیح بیان شده در قضیه ناتمامیت شایتین باشد. بنابراین برای هر عدد صحیح x، حکم «$n < K(x)$» در صورت ناسازگاری نظریه T می‌تواند اثبات شده باشد. با این حال، توجه داشته باشید که برای هر عدد صحیح x، اثباتی برای حکم «$K(x) \leqslant n$» (در T) موجود است، که به سادگی عملکرد برنامه را تا زمان توقف توسط برنامه کامپیوتری از طول حداکثر n که خروجی x را می‌دهد و متوقف می‌شود، شرح می‌دهد.

- فرض کنید $\mathfrak{n}$ عدد صحیحی باشد که برای هر x داشته باشیم $T \nvdash \mathfrak{n} < K(x)$.
- فرض کنید $\mathfrak{m}$ برابر تعداد اعداد صحیح $0 \leqslant x \leqslant 2^{\mathfrak{n}+1}$ باشد که $\mathfrak{n} < K(x)$ است.

از آنجایی که تعداد برنامه‌های کامپیوتری از طول $\mathfrak{n}$ بیت حداکثر $2^{\mathfrak{n}+1}$ است، حداقل یک عدد صحیح $0 \leqslant x \leqslant 2^{\mathfrak{n}+1}$ موجود است به‌طوری که $\mathfrak{n} < K(x)$. لذا $\mathfrak{m} \geqslant 1$.

$\triangleleft$ فرض می‌کنیم که $\mathfrak{m} = 1$. پس عدد صحیح یکتای $x \in \{0, ..., 2^{\mathfrak{n}+1}\}$ موجود است به‌طوری که $\mathfrak{n} < K(x)$ و هر عدد صحیح دیگر $y \in \{0, ..., 2^{\mathfrak{n}+1}\}$ در حکم $K(y) \leqslant \mathfrak{n}$ صدق می‌کند. در این صورت با اثبات اینکه هر عدد صحیح دیگر $y \in \{0, ..., 2^{\mathfrak{n}+1}\}$ در حکم $K(y) \leqslant \mathfrak{n}$ صدق می‌کند، می‌توان ثابت کرد که x در حکم $\mathfrak{n} < K(x)$ صدق می‌کند، یعنی اثباتی برای چنین حکمی موجود است. زیرا فرض کردیم که $\mathfrak{m} \geqslant 1$ و تنها xای که در اثبات حکم $K(x) \leqslant \mathfrak{n}$ صدق نمی‌کند باید در حکم $\mathfrak{n} < K(x)$ صدق کند. بنابراین اگر $\mathfrak{m} = 1$، آن‌گاه برای عدد صحیح x حکم «$\mathfrak{n} < K(x)$»

می‌تواند در T اثبات شود. امّا می‌دانیم که در صورت ناسازگار بودن نظریه T، برای هر عدد صحیح x، حکم «$\mathfrak{n} < K(x)$» می‌تواند در T اثبات شود.

$\rhd$ از این‌رو، اگر نظریه سازگار باشد، آن‌گاه $\mathfrak{m} \geqslant 2$. همان‌طور که قبلاً فرض کردیم، T یک نظریه به اندازه کافی غنی می‌باشد پس نتیجه اخیر را می‌توانیم در T ثابت کنیم؛ یعنی می‌توانیم در T ثابت کنیم که در صورت سازگاری T، $\mathfrak{m} \geqslant 2$ برقرار است.

$\rhd$ فرض می‌کنیم (فرض خلف) که می‌توان سازگاری نظریه T را در داخل نظریه اثبات کرد. بنابراین می‌توانیم حکم «$\mathfrak{m} \geqslant 2$» را در T ثابت کنیم. به همان روش، می‌توانیم برای هر $i \leqslant 2^{\mathfrak{n}+1} + 1$، $\mathfrak{m} \geqslant i + 1$ را ثابت کنیم. به خصوص، $\mathfrak{m} > 2^{\mathfrak{n}+1} + 1$، که یک تناقض است زیرا بنابه تعریف $\mathfrak{m}$، $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\mathfrak{n}+1} + 1$.

ارایه اثبات صوری، نیازمند بیان اثبات‌پذیری درون نظریه T در زبان T است. روش استاندارد با این فرض است که زبان T شامل زبان حساب بوده و هر فرمول و اثبات در نظریه T توسط یک عدد صحیح رمزنگاری شده است. به یاد آورید که برای یک فرمول مانند A عدد گودل آن به صورت $\ulcorner A \urcorner$ می‌باشد و همچنین $\mathsf{provable}_T(\ulcorner A \urcorner)$ فرمولی بدین شرح است: wای موجود است که عدد گودل یک T-اثبات برای فرمول A است. به‌طور شهودی $\mathsf{provable}_T(\ulcorner A \urcorner)$ بیانگر اثبات‌پذیری فرمول A است. سازگاری نظریه T معمولاً با فرمول $\mathsf{Con}(T) \equiv \neg\mathsf{provable}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ بیان می‌شود، بدین معنی که هیچ برهانی برای $\ulcorner 0 = 1 \urcorner$ از T وجود ندارد. صوری شده تعریف ω-سازگاری که در فصل ۱ بیان کردیم به صورت زیر می‌باشد:

$$\omega\text{–}\mathsf{Con}(T) \equiv \forall \psi \; \left[\mathsf{provable}_T(\ulcorner \exists x \; \psi(x) \urcorner) \longrightarrow \exists x \; \neg\mathsf{provable}_T(\ulcorner \neg\psi(x) \urcorner)\right]$$

لم ۳.۲.۱. *برای هر فرمول φ داریم*

$$\mathtt{PA} + \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \vdash \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \longrightarrow \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

برهان. می‌دانیم که $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \longrightarrow \bot$، نماد $\bot$ به عنوان نماد تناقض $(0 = 1)$ در نظر گرفته شده است. طبق منطق گزاره‌ها داریم $\vdash \neg\varphi \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \bot)$ و طبق شرط $(\mathtt{N})$ هیلبرت-بِرْنِی خواهیم داشت: $\mathtt{PA} \vdash \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \longrightarrow (\varphi \longrightarrow \bot) \urcorner)$ و طبق شرط $(\mathtt{K})$ هیلبرت-بِرْنِی خواهیم داشت: $\mathtt{PA} \vdash \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \longrightarrow \bot \urcorner)$ و دوباره با استفاده از شرط

(K) هیلبرت-بِرنِی داریم:

$$\mathtt{PA} \vdash \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \longrightarrow \big(\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \bot \urcorner)\big)$$

و طبق منطق گزاره‌ها

$$\mathtt{PA} \vdash \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \wedge \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \bot \urcorner) \longrightarrow \neg\mathsf{Con}(\mathtt{PA})$$

با عکس نقیض فرمول فوق خواهیم داشت:

$$\mathtt{PA} \vdash \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \longrightarrow \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \vee \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

بنابراین

$$\mathtt{PA} + \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \vdash \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \vee \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

پس

$$\mathtt{PA} + \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) + \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \vdash \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner).$$ □

قضیه ۲.۲.۳. *برای هر Σ_1 فرمول φ داریم:*

$$\mathtt{PA} \vdash \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \longrightarrow (\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \longrightarrow \neg\varphi)$$

برهان. طبق Σ_1 تمامیت داریم

$$\mathtt{PA} \vdash \varphi \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \tag{۱.۳}$$

و طبق لم ۱.۲.۳ خواهیم داشت

$$\mathtt{PA} + \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) + \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \vdash \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \tag{۲.۳}$$

با عکس نقیض رابطه (۱.۳) داریم:

$$\mathtt{PA} + \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) + \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \vdash \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \longrightarrow \neg\varphi$$

پس

$$\mathtt{PA} + \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) + \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\varphi \urcorner) \vdash \neg\varphi$$ □

قضیه ۳.۲.۳. *برای هر Σ_1 فرمول φ داریم:*

$$\mathtt{PA} + \omega\text{–}\mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \vdash \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner) \longrightarrow \varphi$$

برهان. طبق تعریف ω-سازگاری داریم

$$\omega\text{–}\mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \equiv \forall\psi\ \big(\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \exists x\ \psi(x) \urcorner) \longrightarrow \exists x\ \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg\psi(x) \urcorner)\big)$$

و برای Σ_1 فرمول φ فرض می‌کنیم که $\varphi \equiv \exists x \theta(x)$ که در آن θ فرمولی با سورهای کران‌دار است، پس $\mathtt{PA} + \forall \psi \left[\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \exists x\ \psi(x) \urcorner) \longrightarrow \exists x\ \neg \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg \psi(x) \urcorner)\right] +$

$\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \exists x\ \theta(x) \urcorner) \vdash \exists x\ \neg \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \neg \theta(x) \urcorner)$

و از طرفی چون $\neg\theta \in \Sigma_1$ پس بنابه شرط (4) هیلبرت-بِرْنِی داریم:

$$\mathtt{PA} \vdash \neg\theta(x) \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}\big(\neg\theta(x)\big)$$

و با عکس نقیض فرمول فوق خواهیم داشت:

$$\mathtt{PA} \vdash \neg \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}\big(\neg\theta(x)\big) \longrightarrow \theta(x)$$

پس $$\mathtt{PA} \vdash \exists x \neg \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}\big(\neg\theta(x)\big) \longrightarrow \exists x \theta(x)$$

بنابراین $\mathtt{PA} + \omega\text{–}\mathsf{Con}(\mathtt{PA}) + \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner (\exists x \theta(x)) \urcorner) \vdash \exists x \theta(x)$. $\square$

تعریف ۴.۲.۳. مجموعه A را شمارش‌پذیر بازگشتی (شمارای کارآمد) گوئیم هرگاه تابع پوشای محاسبه‌پذیر $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ موجود باشد؛ به عبارتی دیگر الگوریتمی موجود باشد که همه اعضای A را لیست کند. $\triangle$

تعریف ۵.۲.۳. برای هر عدد e و n، تابع جزئی $\varphi_e^n(x_1, ..., x_n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

(1) اگر $e = \langle 1 \rangle$، آنگاه $\varphi_e^n(x_1, ..., x_n) = x_1 + 1$.

(2) اگر $e = \langle 2, i \rangle$ و $1 \leqslant i \leqslant n$، آنگاه $\varphi_e^n(x_1, ..., x_n) = x_i$.

(3) اگر $e = \langle 3, q \rangle$، آنگاه $\varphi_e^n(x_1, ..., x_n) = q$.

(4) اگر $e = \langle 4, e', d_1, ..., d_m \rangle$، آنگاه

$$\varphi_e^n(x_1, ..., x_n) = \varphi_{e'}^m\Big(\varphi_{d_1}^n(x_1, ..., x_n), ..., \varphi_{d_m}^n(x_1, ..., x_n)\Big).$$

(5) اگر $e = \langle 5, d_1, d_2 \rangle$ آنگاه $\varphi_e^{n+1}(0, x_1, ..., x_n) = \varphi_{d_1}^n(x_1, ..., x_n)$

$$\varphi_e^{n+1}(x+1, x_1, ..., x_n) = \varphi_{d_2}^{n+1}(\varphi_e^{n+1}(x, x_1, ..., x_n), x, x_1, ..., x_n).$$

(6) اگر $e = \langle 6, d \rangle$ آنگاه $\varphi_e^n(x_1, ..., x_n) = \mu z\Big(\varphi_d^{n+1}(z, x_1, ..., x_n) = 0\Big)$.

در غیر اینصورت $\varphi_e^n(x_1, ..., x_n)$ تعریف نشده است. $\triangle$

تبصره ۶.۲.۳. *فرض می‌کنیم f یک تابع بازگشتی باشد. اگر مقدار $f(n)$ موجود باشد آنگاه آن را با نماد $f(n)\downarrow$ نشان می‌دهیم. در غیر اینصورت آن را با نماد $f(n)\uparrow$ نمادگذاری می‌کنیم.* $\triangle$

حال تعریفی دیگر برای پیچیدگی کولموگروف می‌آوریم که متفاوت با تعریفی است که در فصل اول آوردیم.

تعریف ۷.۲.۳. پیچیدگی کولموگروف یك معیاری برای اندازه اطلاعاتی است که در مجموعه متناهی از اشیاء می‌تواند کد شود. به‌طور کلی، پیچیدگی کولموگروف عدد طبیعی مانند n که با نماد $K''(n)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از اندازه کوچکترین برنامه‌ایی که n را تولید می‌کند و n تصادفی نامیده می‌شود اگر $n \leqslant K''(n)$. $\triangle$

پیچیدگی کولموگروف منجر به قضیه دوم ناتمامیت نیز می‌شود. در این تعریف از توابع بازگشتی جزئی به جای طول برنامه استفاده می‌شود، بدین صورت که فرض می‌کنیم $\{\varphi_e^n(\overline{x})\}_{e\in\mathbb{N}}$ یك شمارش طبیعی از توابع بازگشتی n-موضعی باشد. همچنین می‌نویسیم $\varphi(\overline{x}) \simeq \varphi'(\overline{x})$ اگر $\varphi(\overline{x})$ و $\varphi'(\overline{x})$ هر دو تعریف نشده باشند و یا هر دو تعریف شده‌اند و $\varphi(\overline{x}) = \varphi'(\overline{x})$. توجه کنید که $\varphi(\overline{x})\downarrow$ می‌تواند توسط یك Σ_1 فرمول بیان شود؛ چرا که گراف $\varphi(\overline{x})$ یعنی $(\overline{x}, \varphi(\overline{x}))$ می‌تواند توسط یك Σ_1 فرمول نمایش داده شود و $\varphi(\overline{x})\downarrow \longleftrightarrow \exists y\big(y = \varphi(\overline{x})\big)$. پیچیدگی کولموگروف $K''(x)$ از x به این صورت تعریف می‌شود: $K''(x) = \mu e(\varphi_e(0) \simeq x)$ که $\mu e(\psi)$ کوچکترین eای صدق‌پذیر در ψ می‌باشد و K'' یك تابع یك به یك بوده و $K''(x) \leqslant y$ نمایش‌پذیر به وسیله Σ_1 فرمول $\exists z \leqslant y(\varphi_z(0) \simeq x)$ می‌باشد.

قضیه ۸.۲.۳. (*قضیه انتخاب*)*: اگر $A \subseteq \mathbb{N}^2$ مجموعه‌ای شمارش‌پذیر بازگشتی (شمارای کارآمد) باشد، آنگاه تابع جزئی بازگشتی $f(n)$ موجود است به طوری که:*

(i) $f(n)\downarrow \Longleftrightarrow \exists m\ (n,m) \in A$

(ii) $f(n)\downarrow \Longrightarrow (n, f(n)) \in A$

برهان. تابع بازگشتی $g : \mathbb{N} \longrightarrow A \subseteq \mathbb{N}^2$ را در نظر می‌گیریم، به طوری که $A = g[\mathbb{N}]$. تابع

$$f(x) = \pi_2\Big[\mu z\Big(g(\pi_1(z)) = \big(x, \pi_2(z)\big)\Big)\Big]$$

نیز بازگشتی است. نصف قسمت (i) یعنی

$$\Big(f(n)\downarrow\Big) \implies \Big(\exists m\ \ (n,m)\in A\Big)$$

از قسمت (ii) نتیجه می‌شود. حال کافی است ثابت کنیم که

$$\exists m\ \ (n,m)\in A \implies f(n)\downarrow$$

اگر $(n,m)\in A$ باشد پس $k\in\mathbb{N}$ موجود است که $(n,m)=g(k)$. حال z را به صورت زوج مرتب $z=\langle k,m\rangle$ در نظر می‌گیریم، پس $\pi_1(z)=k$ و $\pi_2(z)=m$. بنابراین $g\big(\pi_1(z)\big)=\big(n,\pi_2(z)\big)$. پس $f(n)$ وجود دارد یعنی $f(n)\downarrow$. حال به اثبات قسمت (ii) می‌پردازیم:
اگر $f(n)\downarrow$ آنگاه $\exists z\Big[g\big(\pi_1(z)\big)=\big(n,\pi_2(z)\big)\Big]$ پس $(n,\pi_2(z))\in A$ زیرا A برد تابع g می‌باشد و نیز $\pi_2(z)$ همان برابر $f(n)$ می‌باشد، پس $(n,f(n))\in A$. □

قضایای زیر را در این پایان‌نامه بدون اثبات می‌پذیریم [۷] :

قضیه ۹.۲.۳. *(قضیه S^n_m): برای $1\leqslant n$ و $1\leqslant m$، تابع بازگشتی مقدماتی S^n_m موجود است به‌طوری که برای هر $e,x_1,...,x_n,y_1,...,y_m$ داریم*

$$\varphi^{n+m}_e(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=\varphi^m_{S^n_m(e,x_1,...,x_n)}(y_1,...,y_m)$$

قضیه ۱۰.۲.۳. *(قضیه بازگشت): فرض می‌کنیم $f(e,\overline{x})$ یک تابع جزئی بازگشتی باشد (منظور از $\overline{x}$، همان $x_1,...,x_n$ است)، آنگاه اندیس e_0 چنان موجود است که برای هر $\overline{x}$ داریم*

$$\varphi_{e_0}(\overline{x})\simeq f(e_0,\overline{x})$$

قضیه ۱۱.۲.۳. *مجموعه $A\subseteq\mathbb{N}^n$ که $(n\geqslant 1)$ شمارای کارآمد (مجموعه بازگشتی) است اگر و تنها اگر توسط Σ_1 فرمولی مانند φ تعریف‌پذیر باشد یعنی $A=\{\overline{x}\mid\mathbb{N}\models\varphi(\overline{x})\}$.*

لم ۱۲.۲.۳. *برای هر Σ_1 فرمول $R(x,y)$، فرض می‌کنیم که $\Gamma_1(R)$ و $\Gamma_2(R)$ فرمول‌هایی به صورت زیر باشند:*

$$\Gamma_1(R)\iff\forall x\forall y(R(x,y)\longrightarrow y<K''(x))$$

$$\Gamma_2(R)\iff\forall x\forall y\forall z(R(x,y)\wedge z\leqslant y\longrightarrow R(x,z))$$

آنگاه $\mathfrak{n} \in \mathbb{N}$ *موجود است به‌طوری که*

$$\mathtt{PA} + \Gamma_1(R) \wedge \Gamma_2(R) \vdash \forall x \forall y \Big(R(x,y) \longrightarrow y < \mathfrak{n} \Big)$$

برهان. با استفاده از قضیه انتخاب (۸.۲.۳)، تابع بازگشتی $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ چنان موجود است که برای هر $b \in \mathbb{N}$ داریم: $\mathbb{N} \models \Big(\exists x R(x,b) \longrightarrow f(b) \downarrow \Big)$ و $\mathbb{N} \models \Big(f(b) \downarrow \longrightarrow R(f(b),b) \Big)$.

چون PA یك نظریه Σ_1 کامل است پس می‌توان اثبات قضیه (۸.۲.۳) را در PA بیان کرد، بنابراین

$$\mathtt{PA} \vdash \big(\exists x R(x,\bar{b}) \longrightarrow f(b) \downarrow \big) \tag{۳.۳}$$

$$\mathtt{PA} \vdash \forall x \big(x = \overline{f(b)} \longrightarrow R(x,\bar{b}) \big)$$

پس

$$\mathtt{PA} + \Gamma_1(R) \vdash \forall x \big(x = \overline{f(b)} \longrightarrow R(x,\bar{b}) \longrightarrow \bar{b} < K''(x) \big) \tag{۴.۳}$$

طبق قضیه S^n_m، تابع بازگشتی مقدماتی S^1_1 موجود است به‌طوری که $\varphi_{S^1_1(x)}(y) \simeq f(x)$ و از طرفی طبق قضیه بازگشت، اندیس $\mathfrak{n}$ چنان وجود دارد که $\varphi_{\mathfrak{n}}(y) \simeq \varphi_{S^1_1(\mathfrak{n})}(y)$. پس داریم:

$$\varphi_{\mathfrak{n}}(y) \simeq \varphi_{S^1_1(\mathfrak{n})}(y) \simeq f(\mathfrak{n})$$

حال اگر قرار دهیم $y = 0$ آنگاه خواهیم داشت: $\varphi_{\mathfrak{n}}(0) \simeq f(\mathfrak{n})$ و چون PA به اندازه کافی غنی می‌باشد پس $\mathtt{PA} \vdash \forall x \big(x = \varphi_{\mathfrak{n}}(0) \longleftrightarrow x = \overline{f(\mathfrak{n})} \big)$
با در نظر گرفتن $K''(x) = \mu z \Big[\varphi_z(0) \downarrow = x \Big]$ خواهیم داشت:

$$\mathtt{PA} \vdash \forall x (x = \overline{f(\mathfrak{n})} \longrightarrow x = \varphi_{\mathfrak{n}}(0) \longrightarrow K''(x) \leqslant \mathfrak{n}) \tag{۵.۳}$$

بنابه روابط (۴.۳) و (۵.۳) داریم: $\mathtt{PA} + \Gamma_1(R) \vdash f(\mathfrak{n}) \uparrow$ همچنین با استفاده از (۳.۳) خواهیم داشت: $\mathtt{PA} \vdash R(x,\mathfrak{n}) \longrightarrow f(\mathfrak{n}) \downarrow$

پس $\mathtt{PA} + \Gamma_2(R) \vdash \forall x \forall y (R(x,y) \wedge \mathfrak{n} \leqslant y \longrightarrow f(\mathfrak{n}) \downarrow)$

بنابراین $\mathtt{PA} + \Gamma_1(R) \wedge \Gamma_2(R) \vdash \forall x \forall y (R(x,y) \longrightarrow y < \mathfrak{n})$. □

لم ۱۳.۲.۳. *اگر Γ_1 و Γ_2 به صورت تعاریف ارایه شده در لم فوق باشند، آنگاه*

(i) $\mathtt{PA} \vdash \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \longrightarrow \Gamma_1\Big(\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner y < K''(x)\urcorner)\Big)$

(ii) $\mathtt{PA} \vdash \Gamma_2\Big(\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner y < K''(x)\urcorner)\Big)$

برهان. (i) : از آنجایی که $y < K''(x)$ نقیض یک Σ_1 فرمول است پس از قضیه (۲.۲.۳) و تعریف $\Gamma_1(R)$ در لم فوق نتیجه می‌گیریم که

$$\mathtt{PA} \vdash \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \longrightarrow \Gamma_1(\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner y < K''(x)\urcorner))$$

(ii) : فرض می‌کنیم که $R(x,y) \equiv \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner y < K''(x)\urcorner)$. از تعریف $\Gamma_2(R)$ داریم:

$$\Gamma_2(R) \equiv \forall x \forall y \forall z\Big(\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner y < K''(x)\urcorner) \wedge z \leqslant y \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner z < K''(x)\urcorner)\Big)$$

و از طرفی طبق Σ_1 تمامیت صوری شده $\big(\mathtt{PA} \vdash \varphi \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \varphi\urcorner)\big)$ داریم

$$\mathtt{PA} \vdash \forall y \forall z(z \leqslant y \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner z \leqslant y\urcorner))$$

و طبق قاعده $(\mathtt{K})$، محمول $\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(x)$ در قاعده MP صدق می‌کند؛ پس از

$$z \leqslant y < K''(x) \longrightarrow z < K''(x)$$

داریم

$$\mathtt{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\Big(\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner y < K''(x)\urcorner) \wedge \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner z \leqslant y\urcorner) \longrightarrow \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner z < K''(x)\urcorner)\Big)$$

بنابراین $\mathtt{PA} \vdash \Gamma_2(\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner y < K''(x)\urcorner))$. □

قضیه ۱۴.۲.۳. *اگر $\mathfrak{n} \in \mathbb{N}$ همانند لم (۱۲.۲.۳) باشد آنگاه*

(i) $\mathtt{PA} \vdash \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \longrightarrow \forall x\Big(\neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner \mathfrak{n} < K''(x)\urcorner)\Big)$

(ii) $\mathtt{PA} \vdash \omega\text{–}\mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \longrightarrow \forall x\Big(\mathfrak{n} < K''(x) \longrightarrow \neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner K''(x) \leqslant \mathfrak{n}\urcorner)\Big)$

برهان. (i) : چون $K''(x) < y$ فرمولی Σ_1 است، پس طبق قضیه (۲.۲.۳) داریم

$$\mathtt{PA} + \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) + \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner y < K''(x)\urcorner) \vdash y < K''(x) \tag{۶.۳}$$

و طبق لم (۱۳.۲.۳)، $\mathtt{PA} + \mathsf{Con}(\mathtt{PA}) \vdash \Gamma_1(R)$ و $\mathtt{PA} \vdash \Gamma_2(R)$ که در آن

$$R \equiv \mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner y \leqslant K''(x)\urcorner)$$

یك Σ_1 فرمول می‌باشد. از طرفی طبق لم (۱۲.۲.۳) داریم:

$$\mathtt{PA}+\Gamma_1(R)\wedge\Gamma_2(R)\vdash\forall x\forall y\Big(R(x,y)\longrightarrow K''(x)<\mathfrak{n}\Big)$$

پس
$$\mathtt{PA}+\mathsf{Con}(\mathtt{PA})+\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\mathfrak{n}<K''(x)\urcorner)\vdash\mathfrak{n}<K''(x)\wedge K''(x)<\mathfrak{n}$$

بنابراین
$$\mathtt{PA}+\mathsf{Con}(\mathtt{PA})\vdash\neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner\mathfrak{n}<K''(x)\urcorner).$$

قسمت (ii) در واقع از عکس نقیض قضیه (۳.۲.۳) نتیجه می‌شود: در قضیه (۳.۲.۳) فرض می‌کنیم که Σ_1 فرمول $\varphi(x,y)$ برابر $\exists x(K''(x)\leqslant y)$ باشد، پس خواهیم داشت

$$\mathtt{PA}\vdash\omega\text{–}\mathsf{Con}(\mathtt{PA})\longrightarrow\Big[\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner K''(x)\leqslant y\urcorner)\longrightarrow K''(x)\leqslant y\Big]$$

بنابراین
$$\mathtt{PA}\vdash\omega\text{–}\mathsf{Con}(\mathtt{PA})\longrightarrow\forall x\Big[\mathfrak{n}<K''(x)\longrightarrow\neg\mathsf{provable}_{\mathtt{PA}}(\ulcorner K''(x)\leqslant\mathfrak{n}\urcorner)\Big].\quad\square$$

قضیه ۱۵.۲.۳. *$T\nvdash\mathsf{Con}(T)$ مگر اینکه T، ناسازگار باشد.*

برهان. برای اثبات قضیه، نیازمند دو حقیقت در مورد اثبات‌پذیری ادعاهایی در خصوص پیچیدگی کولموگروف هستیم. نخست اینکه $T\vdash\mathsf{Con}(T)\longrightarrow\neg\mathsf{provable}_T(\ulcorner\mathfrak{n}<K(x)\urcorner)$. از قضیه ناتمامیت شایتین طبق قضیه (i)(۱۴.۲.۳) به شرح زیر استفاده خواهیم کرد:

$$T\vdash\mathsf{Con}(T)\longrightarrow\forall x\in\{0,...,2^{\mathfrak{n}+1}\}\neg\mathsf{provable}_T(\ulcorner\mathfrak{n}<K''(x)\urcorner)\tag{۷.۳}$$

و دوم اینکه طبق Σ_1 تمامیت صوری $T\vdash(K''(y)\leqslant\mathfrak{n})\longrightarrow\mathsf{provable}_T(\ulcorner K''(y)\leqslant\mathfrak{n}\urcorner)$. از طرفی می‌دانیم که $K''(x)\leqslant y$ یک Σ_1 فرمول است؛ پس از رابطه زیر استفاده خواهیم کرد:

$$T\vdash\forall y\in\{0,...,2^{\mathfrak{n}+1}\}\Big[(K''(y)\leqslant\mathfrak{n})\longrightarrow\mathsf{provable}_T(\ulcorner K''(y)\leqslant\mathfrak{n}\urcorner)\Big]\tag{۸.۳}$$

فرض می‌کنیم (فرض خلف) که T سازگار است و $T\vdash\mathsf{Con}(T)$. پس بنابه رابطه (۷.۳)،

$$T\vdash\forall x\in\{0,...,2^{\mathfrak{n}+1}\}\neg\mathsf{provable}_T(\ulcorner\mathfrak{n}<K''(x)\urcorner)\tag{۹.۳}$$

توسط استقراء برای هر $i\leqslant 2^{\mathfrak{n}+1}+1$، ثابت خواهیم کرد که $T\vdash(\mathfrak{m}\geqslant i+1)$، پس
$$T\vdash(\mathfrak{m}>2^{\mathfrak{n}+1}+1).$$

و طبق تعریف $\mathfrak{m}$ که برابر تعداد اعداد صحیح $0\leqslant x\leqslant 2^{\mathfrak{n}+1}$ که در حکم $\mathfrak{n}<K''(x)$ صدق می‌کنند می‌باشد، یک تناقض را نتیجه خواهیم گرفت؛ زیرا به وضوح داریم $T\vdash(m\leqslant 2^{\mathfrak{n}+1}+1)$،

که متناقض با فرض سازگاری T و $T \vdash \mathsf{Con}(T)$ است. در حال حاضر می‌دانیم که $T \vdash (\mathfrak{m} \geqslant 1)$.
اکنون پایه استقراء را داریم. فرض می‌کنیم (فرض استقراء) که برای یك $1 \leqslant i \leqslant 2^{\mathfrak{n}+1} + 1$ داریم $T \vdash (\mathfrak{m} \geqslant i)$. به شرح زیر نشان خواهیم داد که $T \vdash (\mathfrak{m} \geqslant i+1)$. فرض می‌کنیم $r = 2^{\mathfrak{n}+1} + 1 - i$.

(1) بنابه تعریف $\mathfrak{m}$،

$$T \vdash (\mathfrak{m} = i) \longrightarrow \exists y_1, ..., y_r \text{ متمایز } \in \{0, ..., 2^{\mathfrak{n}+1}\} \bigwedge_{j=1}^{r} (K''(y_j) \leqslant \mathfrak{n}).$$

(2) بنابراین طبق رابطه (۸.۳) داریم:

$$T \vdash (\mathfrak{m} = i) \longrightarrow \exists y_1, ..., y_r \text{ متمایز } \in \{0, ..., 2^{\mathfrak{n}+1}\} \bigwedge_{j=1}^{r} \mathsf{provable}_T(\ulcorner K''(y_j) \leqslant \mathfrak{n} \urcorner).$$

(3) برای هر $y_1, ..., y_r \in \{0, ..., 2^{\mathfrak{n}+1}\}$ متمایز و هر $x \in \{0, ..., 2^{\mathfrak{n}+1}\} \backslash \{y_1, ..., y_r\}$،

$$T \vdash (\mathfrak{m} \geqslant i) \longrightarrow \Big(\bigwedge_{j=1}^{r} (K''(y_j) \leqslant \mathfrak{n}) \longrightarrow (\mathfrak{n} < K''(x)) \Big) \quad \text{(بنابه تعریف } \mathfrak{m}\text{)}$$

بنابراین طبق شرط (N) هیلبرت برنِی داریم:

$$T \vdash \mathsf{provable}_T(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant i \urcorner) \longrightarrow \Big(\bigwedge_{j=1}^{r} \mathsf{provable}_T(\ulcorner K''(y_j) \leqslant \mathfrak{n} \urcorner) \longrightarrow \mathsf{provable}_T(\ulcorner \mathfrak{n} < K''(x) \urcorner) \Big)$$

(4) بنابه (2) و (3) داریم:

$$T \vdash \Big((\mathfrak{m} = i) \wedge \mathsf{provable}_T(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant i \urcorner) \Big) \longrightarrow \exists x \in \{0, ..., 2^{\mathfrak{n}+1}\} \mathsf{provable}_T(\ulcorner \mathfrak{n} < K''(x) \urcorner).$$

(5) طبق فرض استقراء $T \vdash (\mathfrak{m} \geqslant i)$، پس با استفاده از شرط (N) هیلبرت-برنِی خواهیم داشت $T \vdash \mathsf{provable}_T(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant i \urcorner)$. بنابراین

$$T \vdash (\mathfrak{m} = i) \longrightarrow \exists x \in \{0, ..., 2^{\mathfrak{n}+1}\} \mathsf{provable}_T(\ulcorner \mathfrak{n} < K''(x) \urcorner).$$

(6) از طرفی، از رابطه (۹.۳)، خواهیم داشت $T \vdash \neg(\mathfrak{m} = i)$.

(7) بنابراین، چون $T \vdash (\mathfrak{m} \geqslant i)$، پس $T \vdash (\mathfrak{m} \geqslant i+1)$. □

۳.۳ قضیه دوم ناتمامیت و صورتی از پارادوکس آزمون ناگهانی

در بخش قبل، با استدلالی مشابه پارادوکس آزمون ناگهانی اثباتی برای قضیه دوم ناتمامیت گودل ارایه کردیم. در این بخش، به روش دیگر نشان می‌دهیم که قضیه دوم ناتمامیت صورتی از پارادوکس آزمون ناگهانی را به دست می‌دهد. به‌طور دقیقتر، در مورد نقصی برگرفته از پارادوکس که شامل یک پیش فرض نهفته است، بحث می‌کنیم که می‌توان از آن سازگاری نظریات ریاضی را اثبات کرد و بنابه قضیه دوم ناتمامیت این غیرممکن است.

گام مهم در تجزیه و تحلیل پارادوکس، ترجمه خبر معلم به زبان ریاضی است. نکته کلیدی نهفته شده در صوری‌سازی مفاهیم «ناگهانی» و «دانش» می‌باشد. همان‌طور که قبلاً اظهار کردیم، فرض می‌کنیم که T یک نظریه ریاضی به اندازه کافی غنی (مانند ZFC) باشد و همچنین اعداد $\{1, ..., 5\}$ را روزهایی از هفته و $\mathfrak{m}$ را بیانگر روزی از هفته که آزمون در آن روز برگزار شده است، در نظر می‌گیریم. معلم اعلام کرده بود که «هفته آینده آزمونی برگزار خواهد شد امّا دانش‌آموزان تا روز برگزاری این آزمون از زمان وقوع این آزمون مطلع نخواهند بود». قسمت اول خبر معلم به صورت $\mathfrak{m} \in \{1, ..., 5\}$ صوری شده است. صوری‌سازی قسمت دوم به وسیله جایگزین کردن مفهوم «اثبات‌پذیری» به جای مفهوم «دانش» است؛ به مراجع [۱۷] و [۸] رجوع کنید.

به بیان مجدد، قسمت دوم خبر معلم عبارت است از اینکه «شب قبل از آزمون، دانش‌آموزان با استفاده از این اظهارات قادر به اثبات اینکه آزمون فردا برگزار می‌شود نخواهند بود» یا معادلاً «برای هر $1 \leqslant i \leqslant 5$، اگر دانش‌آموزان با استفاده از این اظهارات قادر به اثبات $(\mathfrak{m} \geqslant i) \longrightarrow (\mathfrak{m} = i)$ باشند، آنگاه $\mathfrak{m} \neq i$.» که می‌توان آن را به صورت عبارت صوری شده زیر در نظر گرفت که آن را با نماد S نشان می‌دهیم، (عبارت S شامل هر دو قسمت خبر معلم می‌باشد):

$$S \equiv [\mathfrak{m} \in \{1, ..., 5\}] \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 5} [\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant i \longrightarrow \mathfrak{m} = i \urcorner) \longrightarrow (\mathfrak{m} \neq i)]$$

$\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner A \urcorner)$ در عبارت فوق، اثبات‌پذیری فرمول A از فرمول S در نظریه T را بیان می‌کند. به‌طور صوری، $\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner A \urcorner)$ بیان کننده فرمولی به صورت زیر می‌باشد:

«عدد گودل یک T-اثبات برای فرمول $A \longrightarrow S$ موجود می‌باشد».

توجه داشته باشید که فرمول S، خودارجاع است. با این حال، این مسئله اساسی نیست و چنان فرمول S می‌تواند ساخته شود (بنابه لم قطری‌سازی)، به مراجع [۱۷] و [۵] رجوع کنید.
حال با در نظر گرفتن خبر معلم که به صورت ذکر شده در فوق، صوری شده است، پارادوکس را بررسی می‌کنیم؛ از روز آخر شروع خواهیم کرد. عبارت $\mathfrak{m} \geqslant 5$ همراه با $\mathfrak{m} \in \{1, ..., 5\}$ این مفهوم را می‌رساند که $\mathfrak{m} = 5$. لذا $\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant 5 \longrightarrow \mathfrak{m} = 5 \urcorner)$ و بنابه S می‌توان نتیجه گرفت که $\mathfrak{m} \neq 5$. بنابراین S ایجاب می‌کند که $\mathfrak{m} \in \{1, ..., 4\}$. با همان روش، می‌توانیم ثابت کنیم که $\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant 4 \longrightarrow \mathfrak{m} = 4 \urcorner)$، و بنابه S می‌توان نتیجه گرفت که $\mathfrak{m} \neq 4$. به همین ترتیب $\mathfrak{m} \neq 3$، $\mathfrak{m} \neq 2$ و $\mathfrak{m} \neq 1$. به عبارت دیگر S ایجاب می‌کند که $\mathfrak{m} \notin \{1, ..., 5\}$. بنابراین S با خودش در تناقض است. حقیقت اینکه S با خودش متناقض است یک توضیح خاصی را برای پارادوکس می‌دهد؛ خبر معلم فقط یک تناقض است. از سوی دیگر، به نظر می‌رسد که این فرمول‌بندی به‌طور کامل پارادوکس را شرح نمی‌دهد. توجه داشته باشید که، چون S یک تناقض است، می‌تواند در اثبات هر حکمی مورد استفاده قرار بگیرد. پس به عنوان مثال، دانش‌آموزان در شب سه‌شنبه با استفاده از S می‌توانند ثابت کنند که آزمون روز چهارشنبه برگزار خواهد شد؛ امّا این بدین معنی نیست که آنها می‌دانند که آزمون روز چهارشنبه برگزار خواهد شد. زیرا آنها می‌توانند با استفاده از S ثابت کنند که آزمون در روز پنج‌شنبه نیز برگزار خواهد شد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که چون S یک تناقض است، اثبات‌پذیری S، دانش را ایجاب نمی‌کند. به هر حال، شهود زیادی به دنبال صوری‌سازی خبر معلم همچون S بود که مفهومی از دانش با مفهومی از اثبات‌پذیری می‌تواند جایگزین شده باشد؛ امّا اگر اثبات‌پذیری S، دانش را ایجاب نکند، آنگاه عبارت S به نظر نمی‌رسد که ترجمه دقیق از خبر معلم به یک زبان ریاضی باشد.
حال به دنبال روش بهتری برای صوری‌سازی خبر معلم هستیم. برای این منظور، وضعیتی از نقطه نظر دانش‌آموزان را در شب سه‌شنبه بررسی می‌کنیم. سه احتمال وجود دارد:
(1) در شب سه‌شنبه، دانش‌آموزان قادر به اثبات وقوع آزمون در روز چهارشنبه نیستند.
(2) سه‌شنبه شب، دانش‌آموزان قادر به اثبات اینکه آزمون روز چهارشنبه برگزار خواهد شد، هستند؛ امّا آنها همچنین قادر به اثبات روزهای دیگر که آزمون در آن روزها برگزار خواهد شد، هستند. (توجه داشته باشید که این حالت تنها در صورتی که دستگاه ناسازگار باشد می‌تواند رخ دهد و در واقع

معادل ناسازگاری دستگاه است.)

(3) سه‌شنبه شب، دانش‌آموزان قادر به اثبات اینکه آزمون در روز چهارشنبه برگزار خواهد شد هستند و آنها قادر به اثبات اینکه آزمون در هر روز دیگر برگزار خواهد شد، نیستند.

تنها بنابه سومین مورد می‌توان گفت که دانش‌آموزان از روز برگزاری آزمون مطلع هستند. آنها می‌دانند که آزمون در روز چهارشنبه برگزار خواهد شد در صورتی که آنها قادر به اثبات اینکه آزمون روز چهارشنبه برگزار می‌شود، باشند و قادر به اثبات اینکه در هر روز دیگر که آزمون در آن روز برگزار خواهد شد، نباشند. از اینرو، مجدداً قسمت دوم از خبر معلم را عنوان می‌کنیم «برای هر $1 \leqslant i \leqslant 5$، اگر بتوان (با استفاده از این اظهارات) ثابت کرد که $(\mathfrak{m} \geqslant i) \longrightarrow (\mathfrak{m} = i)$ و برای $j \neq i$ اثباتی برای $(\mathfrak{m} \geqslant i) \longrightarrow (\mathfrak{m} = j)$ موجود نباشد، آنگاه $\mathfrak{m} \neq i$». پس خبر معلم به صورت عبارت زیر است:

$$S \equiv [\mathfrak{m} \in \{1, ..., 5\}] \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 5} \Big[\Big(\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant i \longrightarrow \mathfrak{m} = i \urcorner) \wedge$$
$$\bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant 5, j \neq i} \neg \mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant i \longrightarrow \mathfrak{m} = j \urcorner) \Big) \longrightarrow (\mathfrak{m} \neq i) \Big]$$

اکنون پارادوکس را با در نظر گرفتن خبر معلم که به صورت عبارت جدید S صوری شده است، بررسی می‌کنیم. همانند قبل، $\mathfrak{m} \geqslant 5$ به همراه $\mathfrak{m} \in \{1, ..., 5\}$ ایجاب می‌کند که $\mathfrak{m} = 5$. بنابراین $\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant 5 \longrightarrow \mathfrak{m} = 5 \urcorner)$. به هر حال، با استفاده از S نمی‌توان $\mathfrak{m} \neq 5$ را نتیجه گرفت، زیرا ممکن است برای $j \neq 5$ نیز داشته باشیم $\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant 5 \longrightarrow \mathfrak{m} = j \urcorner)$. این تنها در صورتی که دستگاه $T+S$ ناسازگار باشد رخ می‌دهد. به‌طور صوری، با استفاده از S نمی‌توان $\mathfrak{m} \neq 5$ را نتیجه گرفت بلکه فرمول $\mathsf{Con}(T, S) \longrightarrow (\mathfrak{m} \neq 5)$ که در آن

$$\mathsf{Con}(T, S) \equiv \neg \mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$$

سازگاری $T+S$ را بیان می‌کند، $(\mathfrak{m} \neq 5)$ را نتیجه می‌دهد. از آنجایی که بنابه قضیه دوم ناتمامیت نمی‌توان $\mathsf{Con}(T, S)$ را در داخل $T+S$ اثبات کرد، نمی‌توان نتیجه گرفت که S، $\mathfrak{m} \neq 5$ را ایجاب می‌کند و از اینرو نمی‌توان استدلال را ادامه داد. به بیان دقیق‌تر، بنابه S نمی‌توان نتیجه گرفت که $\mathfrak{m} \in \{1, ..., 4\}$، بلکه $\mathsf{Con}(T, S) \longrightarrow \mathfrak{m} \in \{1, ..., 4\}$. وقتی که به این روش ادامه دهیم فرمول مطلوب $\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner \mathfrak{m} \geqslant 4 \longrightarrow \mathfrak{m} = 4 \urcorner)$ را به دست نمی‌آوریم بلکه فرمول $\mathsf{provable}_{T,S}(\ulcorner \mathsf{Con}(T, S) \wedge \mathfrak{m} \geqslant 4 \longrightarrow \mathfrak{m} = 4 \urcorner)$ حاصل می‌شود که برای ادامه استدلال کافی

نیست. لذا نتیجه می‌گیریم که دانش‌آموزان در صورتی که سازگاری $T+S$ را در نظر بگیرند آزمون در روز پنج‌شنبه نمی‌تواند برگزار شود زیرا چهارشنبه شب دانش‌آموزان خواهند دانست که در صورت سازگاری $T+S$، آزمون روز پنج‌شنبه برگزار خواهد شد. به هر حال، آزمون در هر روز دیگر از هفته می‌تواند برگزار شود زیرا دانش‌آموزان نمی‌توانند سازگاری $T+S$ را ثابت کنند.

در نهایت، به موضوع خودارجاعی عبارت S می‌پردازیم. موضوع خودارجاعی یک عبارت به اثبات اصلی گودل برای قضیه اول ناتمامیت برمی‌گردد. خودارجاعی چیزی است که باعث درک مشکل اثبات اصلی گودل و خبر معلم را در پارادوکس آزمون ناگهانی متناقض ساخته است. همان‌طور که در فصل ۲ بیان کردیم، برای حل این مسئله، گودل روش قطری‌سازی را معرفی کرده است. در اینجا نیز از شیوه یکسانی می‌توان استفاده نمود.

در صوری‌سازی S، برای نشان دادن مفهوم بین اعداد گودل a و b از نماد $a \Rightarrow b$ استفاده خواهیم کرد. یعنی، $a \Rightarrow b$ عبارتی است که نشان می‌دهد a عدد گودل عبارت A و b عدد گودل عبارت B است به‌طوری که $A \longrightarrow B$. همچنین به تابع $sub(a,b)$ که نشان دهنده جایگزینی b در فرمول با عدد گودل a است، نیاز خواهیم داشت؛ بدین معنی که اگر a عدد گودل فرمول $A(x)$ با متغیر آزاد x و b یک عدد باشد، آنگاه $sub(a,b)$ عدد گودل عبارت $A(b)$ است. فرض می‌کنیم $v_{ij} \equiv \ulcorner \mathfrak{m} \geqslant i \longrightarrow \mathfrak{m} = j \urcorner$. فرمول $Q(x)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$Q(x) \equiv [\mathfrak{m} \in \{1,...,5\}] \wedge \bigwedge_{1\leqslant i \leqslant 5} \Big[\Big(\mathsf{provable}_T(sub(x,x) \Rightarrow v_{ii}) \wedge \bigwedge_{1\leqslant j\leqslant 5, j\neq i} \neg \mathsf{provable}_T(sub(x,x) \Rightarrow v_{ij})\Big) \longrightarrow (\mathfrak{m} \neq i)\Big]$$

فرض می‌کنیم q عدد گودل فرمول $Q(x)$ باشد. عبارت S به صورت $S \equiv Q(q)$ صوری شده است. s را عدد گودل S در نظر می‌گیریم و توجه داریم که $s = sub(q,q)$.

بنابراین

$$S \equiv [\mathfrak{m} \in \{1,...,5\}] \wedge \bigwedge_{1\leqslant i \leqslant 5} \Big[\Big(\mathsf{provable}_T(s \Rightarrow v_{ii}) \wedge \bigwedge_{1\leqslant j\leqslant 5, j\neq i} \neg \mathsf{provable}_T(s \Rightarrow v_{ij})\Big) \longrightarrow (\mathfrak{m} \neq i)\Big]$$

مراجع

[1] G. S. Boolos, J. P. Burgess, R. C. Jeffrey. *Computability and Logic*, Cambridge University Press, 5th edition (2007).

[2] G. Boolos. *A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem*, Notices of the American Mathematical Society 36 (1989) 388–390.

[3] G. Boolos. *The Logic of Provability*, Cambridge University Ppress (1993).

[4] G. J. Chaitin. *Computational Complexity and Gödel's Incompleteness Theorem*, ACM Sigact News 9 (1971) 11–12.

[5] T. Y. Chow. *The Surprise Examination or Unexpected Hanging Paradox*, American Mathematical Monthly 105 (1998) 41–51.

[6] J. N. Crossly, C. J. Ash, C. J. Brickhill, J. C. Stillwell, N. H. Williams. *What is Mathematical Logic?*, Oxford University Press, 4th impression (1979).

[7] R. L. Epstein, W. A. Carnielli. *Computability: Computable Functions, Logic and the Foundations of Mathematics*, Advanced Reasoning Forum, Socorro, New Mexico, USA, 3rd edition (2008).

[8] F. Fitch. *A Gödelized Formulation of the Prediction Paradox*, American Philosophical Quarterly 1 (1964) 161–164.

[9] J. D. French. *The False Assumption Underlying Berry's Paradox*, Journal of symbolic logic 53 (1988) 1220–1223.

[10] M. Kikuchi. *A Note on Boolos's Proof of the Incompleteness Theorem*, Mathematical Logic Quarterly 40 (1994) 528–532.

[11] M. Kikuchi. *Kolmogorov Complexity and the Second Incompleteness Theorem*, Mathematical Logic Quarterly 36 (1997) 437–443.

[12] H. Kotlarski. *The Incompleteness Theorems After 70 Years*, Annals of Pure and Applied Logic 126 (2004) 125–136.

[13] G. Kreisel. *Notes on Arithmetical Models for Consistent Formulae of the Predicate Calculus*, Fundamenta Mathematica 37 (1950) 265–285.

[14] Sh. Kritchman and R. Raz. *The Surprise Eamination Paradox and the Second Incompleteness Theorem*, Notices of the American Mathematical Society 75 (2010) 1454–1458.

[15] E. Mendelson. *Intruduction to Mathematical Logic*, Chapman & Hall/CRC, 5th edition (2010).

[16] W. V. O. Quine. *On a So-Called Paradox*, Mind 62 (1953) 65–66.

[17] R. Shaw. *The Paradox of the Unexpected Examination*, Mind 67 (1958) 382–384.

[18] P. Smith. *An Introduction to Gödel's Theorems*, Cambridge university press, 2nd edition (2013).

[19] C. A. Smoryński. *The Incompleteness Theorems*, in: J. Barwise (ed.) Handbook of Mathematical Logic, North–Holland, Amsterdam (1977), 821–865.

[20] P. Vopenka. *A New Proof on the Gödel's Result of Nonprovability of Consistency*, Bulletin de L'académie Polonaise des Sciences (Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.) 14 (1966) 111–116.

[21] fa.wikipedia.org/wiki/پارادوکس اعدام غیرمنتظره

[22] www.encyclopaediaislamica.com

[۲۳] ف. آذرپیوند، *خودنامصداقی و ناتمامیت*، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی، دانشگاه تبریز، ۱۳۹۰.

[۲۴] پ. سراجی، *مقدمه‌ای بر منطق ریاضی*، اقیانوس معرفت، ۱۳۸۹.

[۲۵] م. صال مصلحیان، *فلسفه ریاضی (کلاسیک، مدرن، پست مدرن)*، انتشارات واژگان خرد، ۱۳۸۴.

[۲۶] ض. موحد، *از ارسطو تا گودل*، انتشارات هرمس، ۱۳۸۷.

[۲۷] ا. ناگل، ج. نیومن، آ. تارسکی، *برهان گودل و حقیقت و برهان*، ترجمه محمد اردشیر، انتشارات مولی، ۱۳۶۴.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اثبات‌پذیری	Provability
استدلال	Argument
استقراء	Induction
استنتاج	Deduction
اصل	Principle
اصل موضوع	Axiom
بازگشتی	Recursive
برهان	Proof
پارادوکس	Paradox
پارادوکس آزمون ناگهانی	Surprise examination paradox
پارادوکس بِری	Berry’s paradox
پارادوکس خودنامصداق	Heterological paradox
پارادوکس دروغگو	Liar paradox
پیچیدگی	Complexity
پیچیدگی کولموگروف	Kolmogrov complexity
تالی	Successor
ترکیب عطفی	Conjunction
ترکیب فصلی	Disjunction

تصمیم‌ناپذیری .... Undecidablitity
تناقض .... Contradiction
ثابت .... Constant
جایگزینی .... Substitution
جمله مستقل .... Independent sentence
حساب .... Arithmetic
حکم .... Statement
حل‌ناپذیری مسئله توقف .... Unsolvability of halting problem
خودارجاعی .... Self-reference
دنباله دودویی .... Binary sequence
زبان .... Language
سازگار .... Consistent
سور وجودی .... Existential quntifier
شرط .... Condition
شمارش‌پذیر .... Enumerable
شهودی .... Intuitive
صحیح .... Sound
صدق‌پذیر .... Satisfiable
صوری .... Formal
عددگودل .... Gödel number
عکس نقیض .... Contraposition
عملگر .... Operator
غیرمنتظره .... Unexpected
فرازبان .... Metalanguage
فرمول .... Formula

قابل توصیف .... Describable
قضایای ناتمامیت گودل .... Incompleteness theorems of Gödel
قضیه .... Theorem
قضیه اساسی حساب .... Fundamental theorem of arithmetic
قطری‌سازی .... Diagonalization
کدگذاری .... Encoding
کَلَک راسِر .... Rosser's trick
ماشین تورینگ .... Turing machine
متغیر .... Variable
متغیر آزاد .... Free Variable
متناهی .... Finite
محاسبه‌پذیر .... Computable
محمول .... Predicate
مسئله توقف .... Halting problem
معادله .... Equation
معنایی .... Semantic
منطق گزاره‌ای .... Propositional Logic
ناتمامیت شایتین .... Chaitin's incompleteness
ناسازگار .... Inconsistent
نتیجه .... Conclusion
نظریه .... Theory
نقیض .... Negation
نمایش‌پذیر .... Representable
وضع مقدم .... Modus Ponens
هم‌ارز .... Equivalent

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

استدلال	Argument
حساب	Arithmetic
اصل موضوع	Axiom
پارادوکس بِری	Berry's paradox
دنباله دودویی	Binary sequence
ناتمامیت شایتین	Chaitin's incompleteness
محاسبه‌پذیر	Computable
پیچیدگی	Complexity
نتیجه	Conclusion
شرایط	Condition
ترکیب عطفی	Conjunction
سازگار	Consistent
ثابت	Constant
تناقض	Contradiction
عکس نقیض	Contraposition
استنتاج	Deduction
قابل توصیف	Describable
قطری‌سازی	Diagonalization

Disjunction .... ترکیب فصلی
Encoding .... کدگذاری
Enumerable .... شمارش‌پذیر
Equation .... معادله
Equivalent .... هم‌ارز
Finite .... متناهی
Formal .... صوری
Formula .... فرمول
Fundamental theorem of arithmetic .... قضیه اساسی حساب
Gödel number .... عددگودل
Halting problem .... مسئله توقف
Heterological paradox .... پارادوکس خودنامصداق
Incompleteness theorems of Gödel .... قضایای ناتمامیت گودل
Inconsistent .... ناسازگار
Independent sentence .... جمله مستقل
Induction .... استقراء
Intuitive .... شهودی
Kolmogrov complexity .... پیچیدگی کولموگروف
Liar paradox .... پارادوکس دروغگو
Language .... زبان
Metalanguage .... فرازبان
Modus Ponens .... وضع مقدم
Negation .... نقیض
Operator .... عملگر
Paradox .... پارادوکس

Predicate .... محمول
Principle .... اصل
Proof .... برهان
Propositional Logic .... منطق گزاره‌ای
Provability .... اثبات‌پذیری
Existential quntifier .... سور وجودی
Recursive .... بازگشتی
Representable .... نمایش‌پذیری
Rosser’s trick .... کَلَک راسِر
Satisfiable .... صدق‌پذیری
Self-reference .... خودارجاعی
Semantic .... معنایی
Sound .... صحیح
Statement .... حکم
Substitution .... جایگزینی
Successor .... تالی
Surprise examination paradox .... پارادوکس آزمون ناگهانی
Theorem .... قضیه
Theory .... نظریه
Turing machine .... ماشین تورینگ
Undecidablitity .... تصمیم‌ناپذیری
Unexpected .... غیرمنتظره
Unsolvability of halting problem .... حل‌ناپذیری مسئله توقف
Variable .... متغیر
Free Variable .... متغیر آزاد

نمایه

Surname: Ghaemi **Name:** Parinaz

Title: The Surprise Examination Paradox and the Second Incompleteness Theorem

Supervisor: Saeed Salehi

Advisor: Mohammad Shahryari

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Mathematical Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2014 **Number of Pages:** 64

Keywords: Gödels Incompleteness Theorems, Kolmogorov Complexity, Surprise Examination Paradox, Self-reference, Arithmetic, Independent Sentence.

Abstract

Gödel's incompleteness theorems are among the most important mathematical results of the 20th contury. Gödel's original proof of the first incompleteness theorem is based on the Lair paradox. The second incompleteness theorem follows directly from Gödel's original proof of the first incompleteness theorem. Different proofs are known for the first and second incompleteness theorems.

In this dissertation, using Chaitin's proof for the first incompleteness theorem, Kolmogorov complexity and an argument that resembles the surprise examination paradox, a new proof for Gödel's second incompleteness theorem is presented; this can also be considered as an acceptable resolution of the surprise examination paradox.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS (MATHEMATICAL LOGIC)

The Surprise Examination Paradox and the Second Incompleteness Theorem

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

Mohammad Shahryari

by

Parinaz Ghaemi

2014